Jahresprüfung 4. Klassen 2020

Zeit	60 min
Hilfsmittel	Taschenrechner
Maximale Punkte	51
Hinweise	Beachten Sie die Rückseite. Erreichbare Punkte sind in eckigen Klammern notiert. Fehlende Lösungswege sowie eine unsaubere oder nicht korrekte Darstellung geben Punkteabzug.

1. Vereinfachen Sie soweit als möglich. Schreiben Sie als einen einzigen, möglichst simplen Bruch.

   (a) $\frac{a}{b} : (bc) \cdot (ab)$ [2p]

   (b) $\frac{(ab)^2}{a^3b-a^2b^3}$ [2p]

   (c) $\frac{6x+11}{2x+4} - \frac{2x+5}{x^2+2x} - 3$ [5p]

   (d) $\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-1}$ [4p]

2. Lösen Sie die Gleichungssysteme und schreiben Sie die Resultate als Lösungsmengen.

   (a) $\left| \begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 2 \\ 4x-3y & = & 1 \end{array} \right|$ [3p]

   (b) $\left| \begin{array}{rcl} 3x-12y & = & 4 \\ -2x+8y & = & 3 \end{array} \right|$ [2p]

   (c) $\left| \begin{array}{rcr} x-y+z & = & 0 \\ -x+5y+z & = & 0 \\ 3x-y+2z & = & -4 \end{array} \right|$ [5p]

3. Faktorisieren Sie soweit als möglich.

   (a) x^2+4x+3 [1p]

   (b) $8x^2y+12x^2-2y-3$ [4p]

   (c) $-2x^4+12x^3-18x^2$ [2p]

   (d) $16a^4-4c^6$ [2p]

   (e) $x^2-5x+14$ [1p]

4. Führen Sie jeweils eine Polynomdivision durch.

   (a) $(4x^3 - 13x + 6) : (x - 2)$ [4p]

   (b) $(x^4 + x^2 - 2) : (x - 1)$ [4p]

5. Lösen Sie die Gleichungen. Notieren Sie die Definitions- und Lösungsmengen.

   (a) $\frac{x-5}{x-2} = 1 - \frac{x+1}{x-2}$ [2.5p]

   (b) $\frac{2}{1+2x} = \frac{8}{3+6x} - \frac{1}{4-x}$ [4p]

   (c) $\frac{x+1}{x^2-3x-10} = \frac{x-2}{x^2-10x+25}$ [3.5p]

Total 51p

Viel Erfolg

Lösungen Jahresprüfung 4. Klassen 2020

1. (a)

$\frac{a}{b} : (bc) \cdot (ab)$	Interpretation der Operationen 1P
$= \frac{a \cdot (ab)}{b \cdot (bc)}$	kürzen und Resultat 1P
$= \frac{a^2}{bc}$	

(b)

$\frac{(ab)^2}{a^3b - a^2b^3}$	ausklammern 1P
$= \frac{(ab)^2}{a^2b(a - b^2)}$	kürzen 1P
$= \frac{b}{a - b^2}$	

(c)

$\frac{6x + 11}{2x + 4} - \frac{2x + 5}{x^2 + 2x} - 3$	HN 1P
$= \frac{6x + 11}{2(x + 2)} - \frac{2x + 5}{x(x + 2)} - 3$	gleichnennrig 1P
$= \frac{x(6x + 11) - 2(2x + 5) - 6x(x + 2)}{2x(x + 2)}$	ausmultiplizieren 1P
$= \frac{6x^2 + 11x - 4x - 10 - 6x^2 - 12x}{2x(x + 2)}$	
$= \frac{-5x - 10}{2x(x + 2)}$	ausklammern 1P
$= \frac{-5(x + 2)}{2x(x + 2)}$	Resultat mit kürzen 1P
$= -\frac{5}{2x}$	

(d)

$\frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - 1}$	erweitern oder gleichnennrig/kürzen 2P
$= \frac{1 - x^2}{x - x^2}$	faktorisieren 1P
$\frac{(1 - x)(1 + x)}{x(1 - x)}$	kürzen und Resultat 1P
$= \frac{1 + x}{x}$	

2. (a)

$$\left|\begin{array}{lcr} 3x+4y & = & 2 \\ 4x-3y & = & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{lcr} 12x+16y & = & 8 \\ 12x-9y & = & 3 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} 25y &= 5 \\ y &= \frac{1}{5} \\ \implies 3x + 4\cdot\frac{1}{5} &= 2 \\ \implies 3x &= 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \\ \implies x &= \frac{2}{5} \\ \mathbb{L} &= \left\{\left(\frac{2}{5}\middle|\frac{1}{5}\right)\right\} \end{aligned}$$

(b)

$$\left|\begin{array}{lcr} 3x-12y & = & 4 \\ -2x+8y & = & 3 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{lcr} 6x-24y & = & 8 \\ -6x+24y & = & 9 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} 0 &= 17 \\ \mathbb{L} &= \{\} \end{aligned}$$

(c)

$$\left|\begin{array}{lcr} x-y+z & = & 0 \\ -x+5y+z & = & 0 \\ 3x-y+2z & = & -4 \end{array}\right|$$

Mit I-II und 2·I-III folgt

$$\left|\begin{array}{lcr} 2x-6y & = & 0 \\ -x-y & = & 4 \end{array}\right|$$

Die obere Gleichung kann man durch 2 teilen

$$\begin{vmatrix} x - 3y & = & 0 \\ -x - y & = & 4 \end{vmatrix}$$

Aus I + II folgt

$$\begin{aligned} -4y &= 4 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Einsetzen in $-x - y = 4$ liefert

$$\begin{aligned} -x + 1 &= 4 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert

$$\begin{aligned} -3 + 1 + z &= 0 \\ z &= 2 \\ \mathbb{L} &= \{-3, -1, 2\} \end{aligned}$$

3. (a)

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

(b)

$$\begin{aligned} 8x^2y + 12x^2 - 2y - 3 &= 4x^2(2y + 3) - (2y + 3) \\ &= (4x^2 - 1)(2y + 3) \\ &= (2x - 1)(2x + 1)(2y + 3) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -2x^4 + 12x^3 - 18x^2 &= -2x^2(x^2 - 6x + 9) \\ &= -2x^2(x - 3)^2 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 16a^4 - 4c^6 &= 4(4a^4 - c^6) \\ &= 4(2a^2 - c^3)(2a^2 + c^3) \end{aligned}$$

(e)

$$x^2 - 5x + 14$$

nicht faktorisierbar

4. (a) $$\begin{array}{l}
\left(4x^3 \qquad - 13x + 6\right) \div \left(x - 2\right) = 4x^2 + 8x + 3 + \dfrac{12}{x-2} \\
\underline{-\,4x^3 + 8x^2} \\
\qquad 8x^2 - 13x \\
\qquad \underline{-\,8x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-\,3x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 12
\end{array}$$

(b) $$\begin{array}{l}
\left(x^4 \qquad + x^2 \qquad - 2\right) \div \left(x - 1\right) = x^3 + x^2 + 2x + 2 \\
\underline{-\,x^4 + x^3} \\
\qquad x^3 + x^2 \\
\qquad \underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad\qquad 2x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad 2x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

5. (a)

$$\frac{x-5}{x-2} = 1 - \frac{x+1}{x-2}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$$x - 5 = x - 2 - (x + 1)$$

$$x - 5 = x - 2 - x - 1$$

$$x = 2$$

$$x \notin \mathbb{D} \implies \mathbb{L} = \{\}$$

(b)

$$\frac{2}{1+2x} = \frac{8}{3+6x} - \frac{1}{4-x}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$$

$$\frac{2}{1+2x} = \frac{8}{3(1+2x)} - \frac{1}{4-x} \qquad \Big| \cdot 3(1+2x)\cdot(4-x)$$

$$6(4-x) = 8(4-x) - 3(1+2x)$$

$$24 - 6x = 32 - 8x - 3 - 6x$$

$$8x = 5$$

$$x = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{8}\right\}$$

(c)

$$\frac{x+1}{x^2-3x-10} = \frac{x-2}{x^2-10x+25}$$

$$\frac{x+1}{(x-5)(x+2)} = \frac{x-2}{(x-5)^2} \qquad \Big| \cdot (x-5)^2\cdot(x+2)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2, 5\}$$

$$(x+1)\cdot(x-5) = (x-2)\cdot(x+2)$$

$$x^2 - 5 - 4x = x^2 - 4$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$