1) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+x}{2x^2+x-1}$

a) Nennerpolynom faktorisieren:

$2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1) = 0.5(x - 0.5)(x + 1) \Rightarrow x_1 = 0.5, x_2 = -1.\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}0.5\}$

b) Zählerpolynom gleich 0:

$2x^3 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1)(x + 1) = 0.5x(x + 0.5)(x + 1)$

$x_3 = 0, x_4 = -0.5, x_5 = -1$. $x_5 = -1$ ist eine Definitionslücke $\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke.

c) $f'(x) = 0$:

$f'(x) = \frac{(6x^2+6x+1)(2x-1)(x+1)-x(2x+1)(x+1)(4x+1)}{(2x-1)^2(x+1)^2} = \frac{(6x^2+6x+1)(2x-1)-x(2x+1)(4x+1)}{(2x-1)^2(x+1)} = \frac{4x^3-5x-1}{(2x-1)^2(x+1)} = \frac{(4x^2-4x-1)(x+1)}{(2x-1)^2(x+1)} = \frac{4x^2-4x-1}{(2x-1)^2}$

$\frac{4x^2-4x-1}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0 \xRightarrow{Mitternachtsformel} x_6 = 0.5 - 0.5\sqrt{2}, x_2 = 0.5 + 0.5\sqrt{2}.$

$f''(x) = \frac{(8x-4)(2x-1)^2-(4x^2-4x-1)4(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{(8x-4)(2x-1)-4(4x^2-4x-1)}{(2x-1)^3} = \frac{16x^2-16x+4-16x^2+16x+4}{(2x-1)^3} = \frac{8}{(2x-1)^3}$

$f''(0.5 - 0.5\sqrt{2}) = \frac{8}{(1-\sqrt{2}-1)^3} < 0 \Rightarrow x_6 = 0.5 - 0.5\sqrt{2}$ ist Maximalstelle

$f''(0.5 + 0.5\sqrt{2}) = \frac{8}{(1+\sqrt{2}-1)^3} > 0 \Rightarrow x_6 = 0.5 + 0.5\sqrt{2}$ ist Minimalstelle

d) $f''(x) = 0: 8 = 0\ \Rightarrow\ keine\ Wendestellen.$

e) Definitionslücken bei $x_1 = 0.5, x_2 = -1$, wovon $x_1 = 0.5$ eine Polstelle mit vertikaler Aymptote $x = 0.5$ ist und $x_2 = -1$ eine hebbare Definitionslücke, da $x_2 = -1$ ebenfalls eine Nullstelle des Zählerpolynoms ist.

Da der Grad des Zählerpolynoms um 1 grösser ist als der Grad des Nennerpolynoms, existiert eine Näherungsfunktion vom Grad 1, also eine Gerade mit Steigung $\neq 0$. Polynomdivision:

$(2x^3 + 3x^2 + x) : (2x^2 + x - 1) = x + 1 + \frac{x+1}{2x^2+x-1}$

$\underline{-(2x^3 + x^2 - x)}$

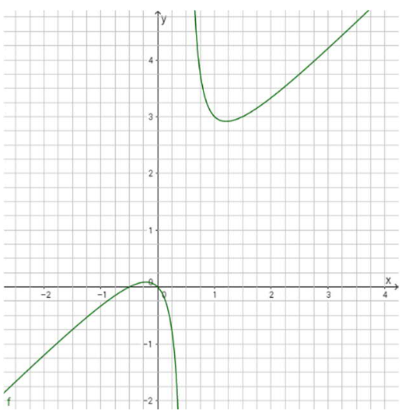
$2x^2 + 2x$

$\underline{-(2x^2 + x - 1)}$

$x + 1$

$\Rightarrow$ schräge Asymptote: $y = x + 1$

f) Graph:



2) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir benötigen 4 Bedingungen/Gleichungen um die 4 Parameter zu bestimmen. Bei 2 Informationen handelt es sich um Informationen zur 1. Ableitung: $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

- $p(0) = 0$: $\Rightarrow d = 0$. Also: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

(1) $p(-2) = -8a + 4b - 2c = -2$

(2) $p'(-2) = 12a - 4b + c = 8$

(3) $p'(-1) = 3a - 2b + c = 0$

Gleichungssystem lösen:

Aus (3): $c = 2b - 3a$

In (1): $-8a + 4b - 2(2b - 3a) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$

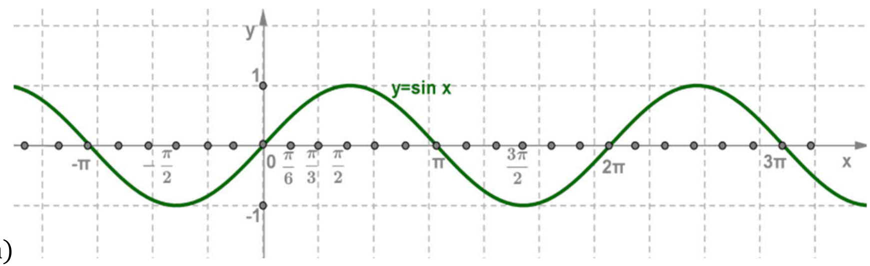
In (3): $c = 2b - 3$

In (2): $12 - 4b + 2b - 3 = 8 \Leftrightarrow -2b = -1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

In (3): $c = 1 - 3 = -2$

Lösung: $p(x) = x^3 + 0.5x^2 - 2x$

3)



a)

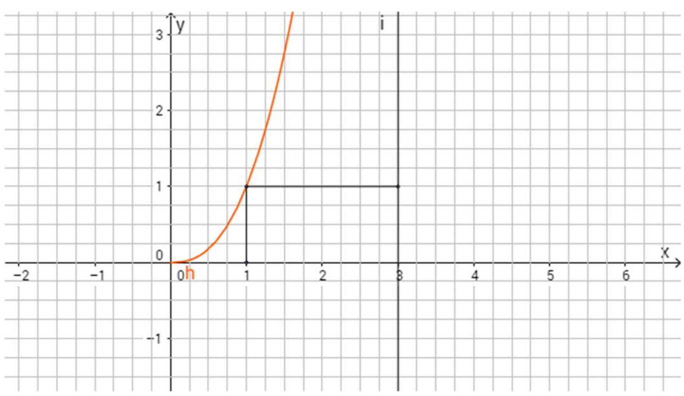
b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,dx = 2[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(0)\right) = 2(-0.5 + 1) = 1$

c) $\int_a^{a+3} x^{-0.5}dx = [2x^{0.5}]_a^{a+3} = 2(a+3)^{0.5} - 2a^{0.5} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a+3} = 1 + \sqrt{a} \Leftrightarrow$

$a + 3 = 1 + 2\sqrt{a} + a \Leftrightarrow 2 = 4\sqrt{a} \Leftrightarrow 4 = 16a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

d) $V = \pi \int_0^3 \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 x^5 dx = \pi \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^3 = \frac{1}{6}3^6\pi = \frac{729}{6}\pi = 121.5\pi$

e)



$V(x) = (3 - x)x^5\pi = (3x^5 - x^6)\pi, 0 < x < 3$

$V'(x) = (15x^4 - 6x^5)\pi = 0 \Leftrightarrow 6 \Leftrightarrow 15x^4 = 6x^5 \Leftrightarrow 15 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{15}{6} = 2.5$

$V(2.5) = 0.5 \cdot 2.5^5\pi = \frac{3125}{64}\pi \approx 153.398$

4) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-(-1) \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Ansatz: $4x + 8y - 2z + d = 0$. Punkt P einsetzen: $8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

$E: 4x + 8y - 2z - 8 = 0$

c) $F: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}?: \begin{matrix} t\ beliebig \\ t = -0.2 \\ t = -0.2 \end{matrix}$ ⇒ Die beiden Richtungsvektoren sind kollinear

parallel oder identisch? $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}?: \begin{matrix} keine\ Lösung \\ t = 2 \\ t = 0 \end{matrix}$. Die Geraden sind parallel.

e) Der Schnittwinkel der Normalenvektoren ist der gesuchte Winkel.

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 2+1 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}\right) = arcsin\left(\frac{-2+3+14}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{59}}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{59}}\right) = 40.61°$

5) Bei den Folgen $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ und $A_1, A_2, \ldots$ handelt es sich um geometrische Folgen mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, wie Sie sehen werden.

a) Der Zentriwinkel beträgt 20°. Eine Umdrehung: $\frac{360°}{20°} = 18$ Strecken. 3 Umdrehungen: 54 Strecken.

b) Da $\sin(20°) = \frac{a_1}{20}$ und $\cos(20°) = \frac{b_1}{20}$ folgt: $a_1 = 20\sin(20°)$ und $b_1 = 20\,cos(20°)$. $b_1$ist die Hypotenuse des zweiten Dreiecks: $\sin(20°) = \frac{a_2}{20\,cos(20°)}$ und $\cos(20°) = \frac{b_2}{20\,cos(20°)}$ folgt: $a_2 = 20\sin(20°)\cos(20°)$ und $b_2 = 20\ \cos(20°)^2$.

Der Faktor q der beiden geometrischen Folgen ist $q = \cos(20°)$.

c) Die 18 Dreiecksflächen $A_1, A_2, \ldots, A_{18}$ beschreiben die grau markierte Fläche. $A_i = \frac{a_i \cdot b_i}{2} = 200\sin(20°)\cos(20°)\cos(20°)^{2(i-1)}$. Wir suchen $A = \sum_{i=1}^{18} A_i$. In der Terminologie einer geometrischen Reihe ist dies die 17. Partialsumme $s_{17} = a_0 \sum_{k=0}^{17} q^k$ wobei das a_0 unser Startwert $A_1 = 200\sin(20°)\cos(20°)$ ist und $q = \cos(20°)^2$.

Formel: $s_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$A = s_{17} = 200\sin(20°)\cos(20°) \sum_{k=0}^{17} \cos(20°)^{2k} =$

$200\sin(20°)\cos(20°) \frac{\cos(20°)^{2\cdot(17+1)}-1}{\cos(20°)^2-1} = 491cm^2$

d) Neue geometrische Reihe: $s = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Unser Dreiecksseite a_1 ist das $a_0 = 20\sin(20°)$ und q =$\cos(20°)$.

Formel: $s = \frac{a_0}{1-q} = \frac{20\sin(20°)}{1-\cos(20°)} = 113.4cm$

e) Grenzwert der Folge $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Weiter als 0.01 vom Grenzwert entfernt: $a_n - 1 > 0.01 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} - 1 > 0.01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow 100 > n \Rightarrow 99\ Folgenglieder$

6) Wahrscheinlichkeit

a) 10er Würfel/6er Würfel: $(10,2), (9,3), (8,4), (7,5), (6,6) \Rightarrow 5\ Möglichkeiten$

b) $n = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$

c) $P((4,4)) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{72}$

d) $Das\ Ereignis\ A\ sei\ (1,2,3,4,5)$: $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Jetzt 9mal Würfel und jedes Mal trifft das Ereignis A ein: $P(9mal\ hintereinander\ A) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^9}$

e) Erwartete Augenzahl eines 4er Würfels: $\frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$

Erwartete Augenzahl eines 8er Würfels: $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4.5$. Geteilt durch 2 gibt: 2.25

Der 4er Würfel hat einen Vorteil.

f) $P(Anna\ verliert) = 0.9$, $P(Anna\ gewinnt) = 0.1$. «Mindestens einmal gewinnen» ist das Gegenereignis zu «immer verlieren»:

$1 - 0.9^n > 0.95 \Leftrightarrow 0.05 > 0.9^n \Leftrightarrow \ln(0.05) > n\cdot\ln(0.9) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.9)} = 28.43 \Rightarrow n = 29$

g) Erfolg bedeutet: «eine 9 Würfeln». $P(eine\ 9\ würfeln) = \frac{1}{10}$. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl Erfolge bei 12 Würfen. Die Zufallsvariable X ist folglich binomialverteilt: $X \sim Bi(12,0.1)$.

$$P(X = 4) = \binom{12}{4} 0.1^4 \cdot 0.9^8 = 0.0213$$