1)

a) a.1 Es hat 6 verschiedene Farben zur Verfügung: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{6!}{1!} = 720$

a.2 Züge ohne rot (aber mit gelb), also total 5 Farben (es hat von allen Farben mindestens 5 Klötze zur Verfügung): $5^5 = 3125$.

Bei den Zügen mit rot kann rot nicht an letzter Stelle kommen, sondern nur an der 1. bis 4. Stelle und dahinter kommt immer gelb. Züge mit einmal rot:

Rot an 1. Stelle, gelb an 2. Stelle. 3 bleiben frei für die 5 anderen Farben: $5^3 = 125$

Rot an 2. Stelle, gelb an 3. Stelle: 3 bleiben frei für die 5 anderen Farben: $5^3 = 125$

Dito für rot an 3. und gelb an 4. Stelle respektive rot an 4. und gelb an 5. Stelle

Total: $4 \cdot 125 = 500$

Züge mit 2mal rot: Da rot und gelb immer zusammen vorkommen gibt es nur 3 Möglichkeiten für 2mal rot: rot an 1. und 3. Stelle, rot an 1. und 4. Stelle, rot an 2. und 4. Stelle. Es bleibt dann immer einer Stelle frei, die mit einer anderen Farbe besetzt werden kann: $3 \cdot 5 = 15$

Rot kann nicht 3mal vorkommen.

Total: $n = 3125 + 500 + 15 = 3640$

a.3 Einfarbige Züge sind nicht erlaubt: $n = 2^5 - 2 = 30$

a.4 i. Total sind es 14 Klötze. $P(rot, rot, pink) = \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{273}$

a4. ii. Die Nenner der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse sehen immer gleich aus: $14 \cdot 13 \cdot 12$. Wir müssen immer 3 der 4 Farben auswählen. Es spielt eine Rolle, welche 3 Farben es sind. Diese 3 Farben kann man dann auf $3! = 6$ Arten anordnen:
$P(lauter\ verschiedene\ Farben) = 3!\frac{5\cdot 4\cdot 3}{14\cdot 13\cdot 12} + 3!\frac{5\cdot 4\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12} + 3!\frac{5\cdot 3\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12} + 3!\frac{4\cdot 3\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12} = \frac{11}{26}$

b) einfarbige Züge: 6 Möglichkeiten

zweifarbige Züge: Wir müssen 2 aus 6 Farben auswählen und dann gibt es je 2 Anordnungen (z.B. 2 rot und 1 gelb, 1 rot und 2 gelb). $2 \cdot \binom{6}{2} = 30$ Möglichkeiten

dreifarbige Züge: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Möglichkeiten.

Total: $n = 6 + 30 + 120 = 156$

c) Bei einem fairen Spiel soll der Erwartungswert des Gewinns 0 betragen.
$P(rot, grün, gelb\ oder\ blau) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$, $P(schwarz\ oder\ pink) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$$2 \cdot \frac{3}{4} - x \cdot \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

d) Es sind 9 blaue und 7 gelbe Klötze. Erfolg bedeutet, dass ein gelber Klotz gezogen wird: $P(Erfolg) = \frac{7}{16}$. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl Erfolge und ist folglich binomialverteilt: $X \sim Bi\left(9, \frac{7}{16}\right)$.

d.1. $P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{9}{7}\left(\frac{7}{16}\right)^7\left(\frac{9}{16}\right)^2 + \binom{9}{8}\left(\frac{7}{16}\right)^8\left(\frac{9}{16}\right)^1 = 0.0349 + 0.0068 = 0.0417$

d.2. $P(blau) = \frac{9}{16}$: $\left(\frac{9}{16}\right)^n < 0.01 \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{9}{16}\right) < \ln(0.01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{9}{16}\right)} = 8.004 \Rightarrow n = 9$

2) Pyramide mit quadratischer Grundfläche: 3 Ecken $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ und die Spitze $\vec{s} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 23 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

a) $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \vec{c} + \overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-7 \\ 12-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Oder: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 3-7 \\ 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) Zu zeigen:

1. Variante: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BA}$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ und : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 4 + 4 = 0$

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$

2. Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene:
   $14 - 3 + 12 - 23 = 0$

   $10 - 7 + 20 - 23 = 0$

   $2 - 3 + 24 - 23 = 0$

c) Die Gerade $g = \vec{s} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zur Ebene E. Wir suchen den Schnittpunkt mit der Ebene E:

$2(15 + 2t) - (-1 - t) + 2(23 + 2t) - 23 = 0 \Leftrightarrow 30 + 4t + 1 + t + 46 + 4t - 23 = 0 \Leftrightarrow$

$9t = -54 \Leftrightarrow t = -6$: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 23 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-12 \\ -1+6 \\ 23-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

$h = |\overrightarrow{LS}| = \left| \begin{pmatrix} 15-3 \\ -1-5 \\ 23-11 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 36 + 144} = \sqrt{324} = 18$

$G = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = \sqrt{16 + 16 + 4}^2 = 36$

$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 18 = 216$

e) $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. Das prozentuale Verhältnis hängt nur von der Grundfläche ab. Die Grundfläche der Pyramide beträgt: $G_{Pyramide} = s^2 = 36$. Die Grundfläche des Kegel beträgt: $G_{Kegel} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = \frac{\pi s^2}{4}$. Das Verhältnis beträgt: $\frac{\frac{\pi s^2}{4}}{s^2} = \frac{\pi}{4} = 0.7854 = 78.54\%$. Der Kegel ist 21.46% kleiner.

f) Der Schnittwinkel ist der Ebenen ist der Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n_{ABS}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68+16 \\ 32+34 \\ 8-32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 66 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{ABS}} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_{ABS}}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{n_{ABS}}|} = \frac{|28-22-8|}{\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{37}} = \frac{2}{9\sqrt{37}}$. $\arccos\left(\frac{2}{9\sqrt{37}}\right) = 87.91°$

g) Die beiden Kanten dürfen keinen Eckpunkt der Pyramide gemeinsam haben und nicht parallel sein. Zum Beispiel: AB und CS.

h) Ansatz für die Punkte auf der x-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x-7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. $\left|\overrightarrow{AX}\right| = \sqrt{(x-7)^2 + 9 + 36} = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 45} = \sqrt{x^2 - 14x + 94}$

$\sqrt{x^2 - 14x + 94} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 94 = 49 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-5) = 0$

$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -5 \Rightarrow (0|-5)$

Nullstellen: $f(x) = 0$. Erste Lösung raten: $x_1 = 1$. $f(1) = 2 - 9 + 12 - 5 = 0$

Abspalten des Faktors $(x-1)$ mittels Polynomdivision:

$(2x^3 - 9x^2 + 12x - 5) : (x-1) = 2x^2 - 7x + 5 = (2x - 5)(x-1) \Rightarrow x_2 = 1, x_3 = \frac{5}{2}$

Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12, f''(x) = 12x - 18, f'''(x) = -18$

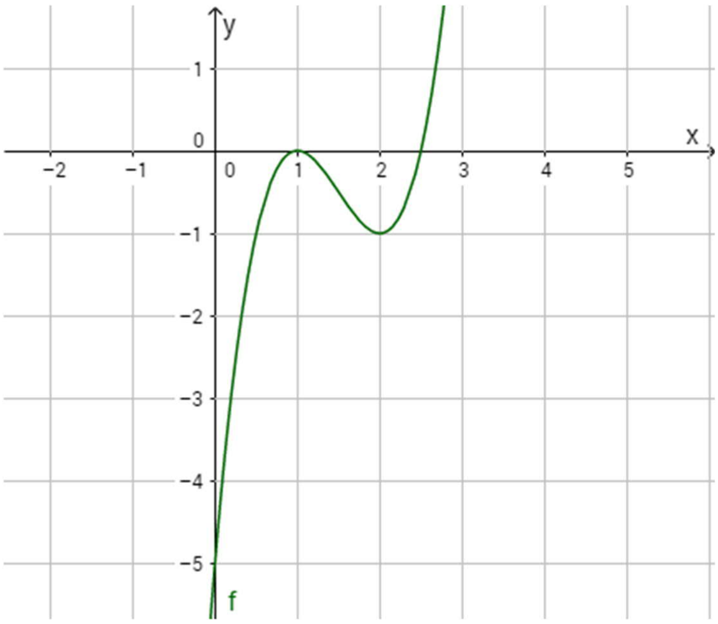
Extremstellen: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$x_4 = 1, x_5 = 2$. $f''(1) = 12 - 18 = -6 \Rightarrow Maximum$. $f''(2) = 24 - 18 = 6 \Rightarrow Minimum$.

Maximum: $(1|f(1)) = (1|0)$. Minimum: $(2|f(2)) = (2|-1)$

Wendestellen: $f''(x) = 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow 12x = 18 \Leftrightarrow x_6 = \frac{3}{2}$. $f'''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 \neq 0 \Rightarrow Wendestelle$.

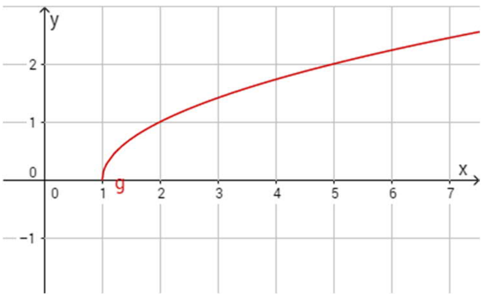
Wendepunkt: $\left(\frac{3}{2}\middle|f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)$



4) $y_a = \sqrt{x - a^2}$

a) Der Term unter der Wurzel muss > 0 sein. $x - a^2 > 0 \Leftrightarrow x > a^2$. $D_a = \{x \in \mathbb{R} | x > a^2\}$

b) $y_1 = \sqrt{x - 1}$



c) $\sqrt{x-1} = \sqrt{6-x} + 1 \Leftrightarrow x - 1 = (6-x) + 2\sqrt{6-x} + 1 \Leftrightarrow 2x - 8 = 2\sqrt{6-x} \Leftrightarrow$

$x - 4 = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) = 0.$

Mögliche Lösungen: $x_1 = 2, x_2 = 5$. Kontrolle: $x_1 = 2$: $\sqrt{1} = \sqrt{4} + 1$ *keine Lösung*. $x_1 = 5$: $\sqrt{4} = \sqrt{1} + 1$ *ist Lösung*.

e) $V = \pi \int_{a^2}^{3a^2} \left(\sqrt{x - a^2}\right)^2 dx = 162\pi \Leftrightarrow \int_{a^2}^{3a^2} (x - a^2)\, dx = 162 \Leftrightarrow [\frac{1}{2}x^2 - a^2x]_{a^2}^{3a^2} = 162$

$$\frac{9}{2}a^4 - 3a^4 - \frac{1}{2}a^4 + a^4 = 162 \Leftrightarrow 2a^4 = 162 \Leftrightarrow a^4 = 81 \Leftrightarrow a = \pm$$

5)

a) Ansatz für die Parabel: $g(x) = ax^2 + bx + c$. 3 Parameter: Wir benötigen 3 Gleichungen.

(1) $f(1) = \frac{3}{2}$: $g(1) = a + b + c = \frac{3}{2}$

(2) $f'(x) = 3\, e^{2x-2}, f'(1) = 3$; $g'(x) = 2ax + b$: $g'(1) = 2a + b = 3$

(3) $g'(2.5) = 5a + b = 0$

Aus (3): $b = -5a$. In (2): $2a - 5a = 3 \Leftrightarrow a = -1$. $b = 5$. In (1): $5 + (-1) + c = 1.5 \Rightarrow x = 2.5$

$g(x) = 5x^2 - x + 2.5$

b) $2\sin(x) = 2 - 2\cos(x)^2 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 - \cos(x)^2 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(x)^2$. Dies ist bei $\sin(x) = 0$ und $\sin(x) = 1$ der Fall. Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ (*siehe Einheitskreis*):

$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi,\ x_4 = 2\pi.$

Schnittwinkel φ: $h'(x) = 2\cos(x)$, $i'(x) = -2 \cdot 2\cos(x)\,(-\sin(x)) = 4\sin(x)\cos(x) = 2\sin(2x)$

$h'(1) = 2\cos(1) = 1.08, i'(1) = 1.82$

$arctan(1.08) = 47.2°$, $\arctan(1.82) = 61.21°$: *Die Differen ist* $\varphi = 14.01°$

c) $\int_1^2 1 + \frac{1}{x} dx = [x + \ln(x)]_1^2 = 2 + \ln(2) - 1 - 0 = \ln(2) + 1 = 1.69$

d) $A(x) = (2-x)e^{3x}$. $A'(x) = -e^{3x} + (2-x)3e^{3x} = 5e^{3x} - 3xe^{3x}$.

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 5e^{3x} - 3xe^{3x} = 0 \Leftrightarrow 5 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

$A\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot e^5 = 49.47$