KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben Potenzfunktionen

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Es geht vor allem darum zu erkennen welcher Graph unter welchen Bedingungen entsteht. Zudem soll auch eine Potenzfunktion aus vorgegebenen Bedingungen hergeleitet werden können.

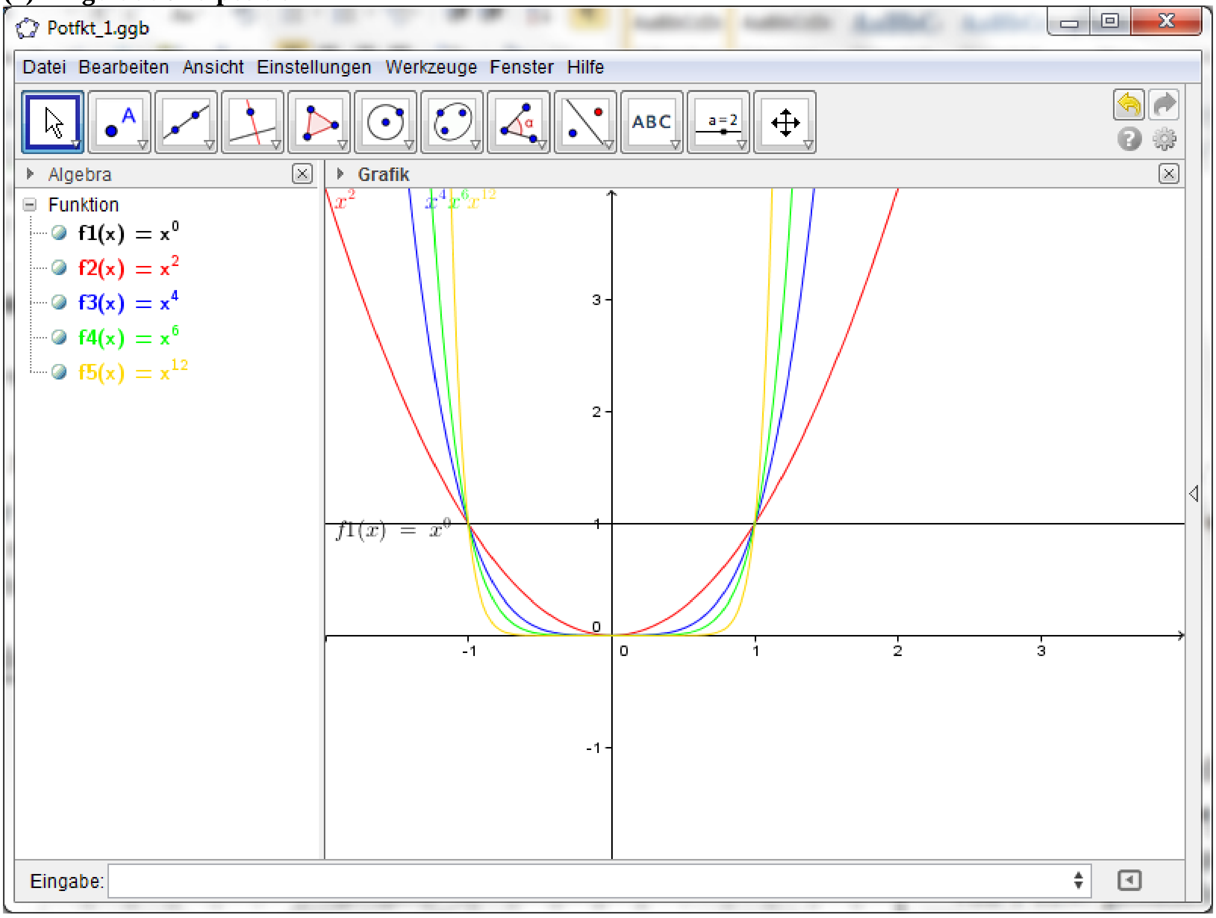
Definition: Eine Funktion f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift
$x \mapsto y = f(x) = x^n$, $n\in\mathbb{Z}$ heisst Potenzfunktion.
Bei einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ konnten wir etwas über a, b, c aussagen.
Ist das bei der Potenzfunktion auch möglich? Was sagt n aus?
Und was bedeuten a, b, n, x_0 wenn $f(x) = a\cdot(x-x_0)^n + b$ ist?
Hinweis: Für die „Erforschung“ kann n auch negativ oder eine Bruchzahl sein!

B) Lernziele

- Gefühl entwickeln für den Zusammenhang Funktionsgleichung und graphischer Darstellung
- Aussagen über die Parameter a, b, n und x_0 machen können
- Funktionen anhand des Graphen bestimmen können

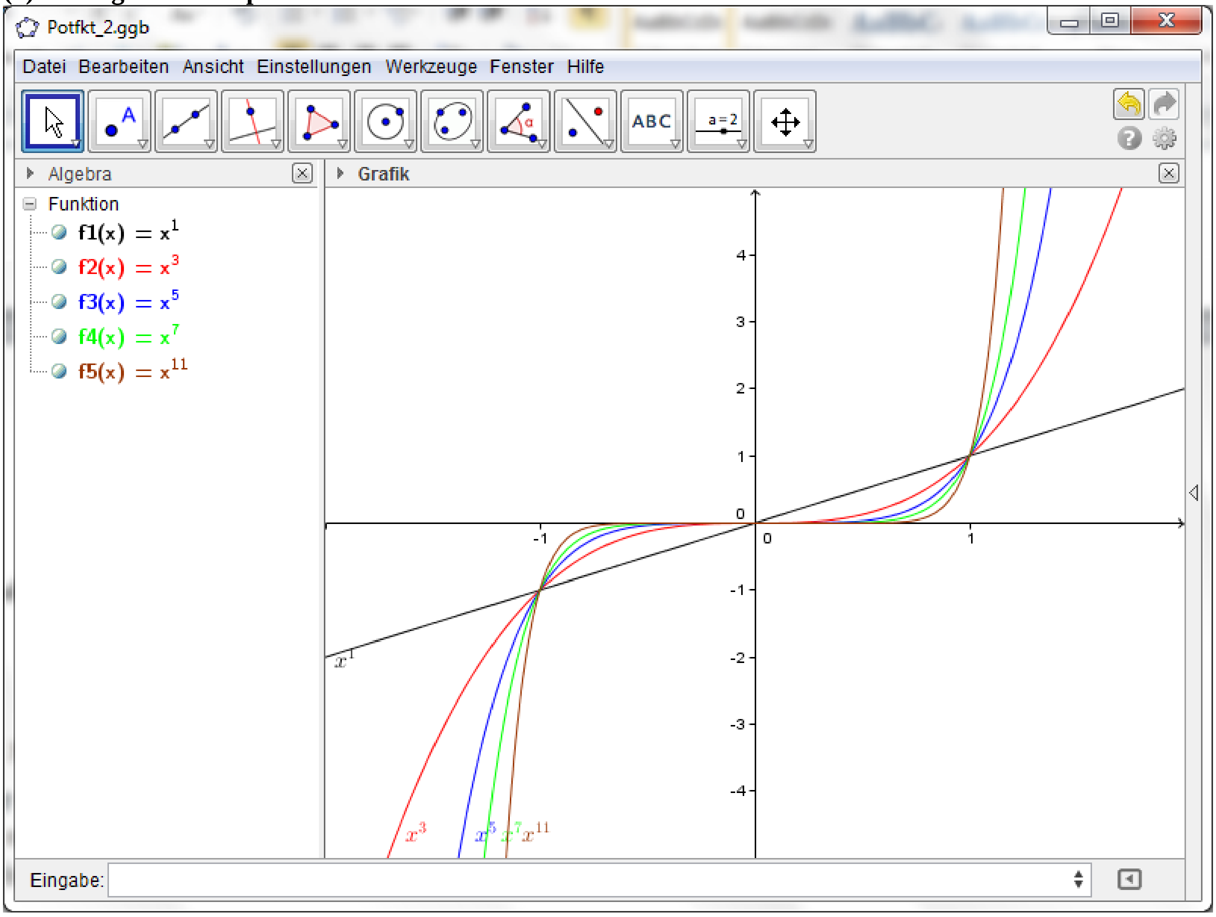
C) Entdeckungen (Graphiken gezeichnet mit GeoGebra 4.2)

(1) *n* gerade und positiv



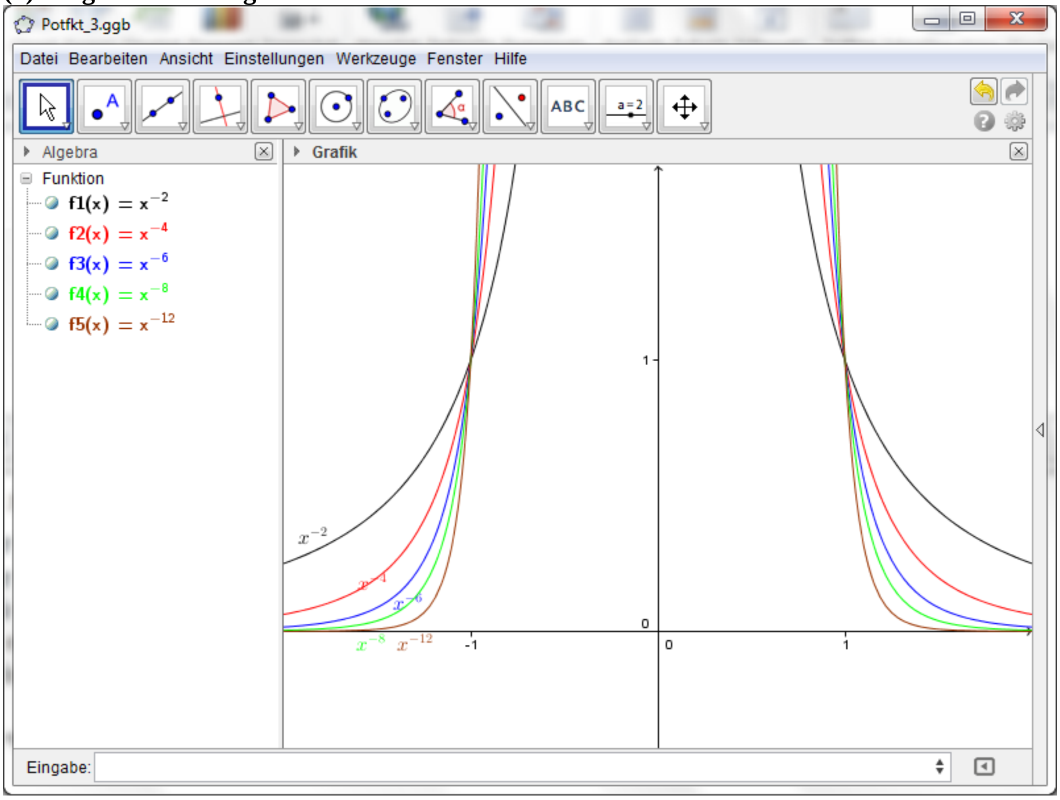
$f_1(x) = x^0$: Parallele zur x- Achse durch 1.
Je grösser n, desto gestreckter oberhalb von 1 bzw. gestauchter unterhalb von 1.
Parabeln n-ten Grades, n gerade.
Symmetrisch zur y-Achse.

(2) *n* ungerade und positiv



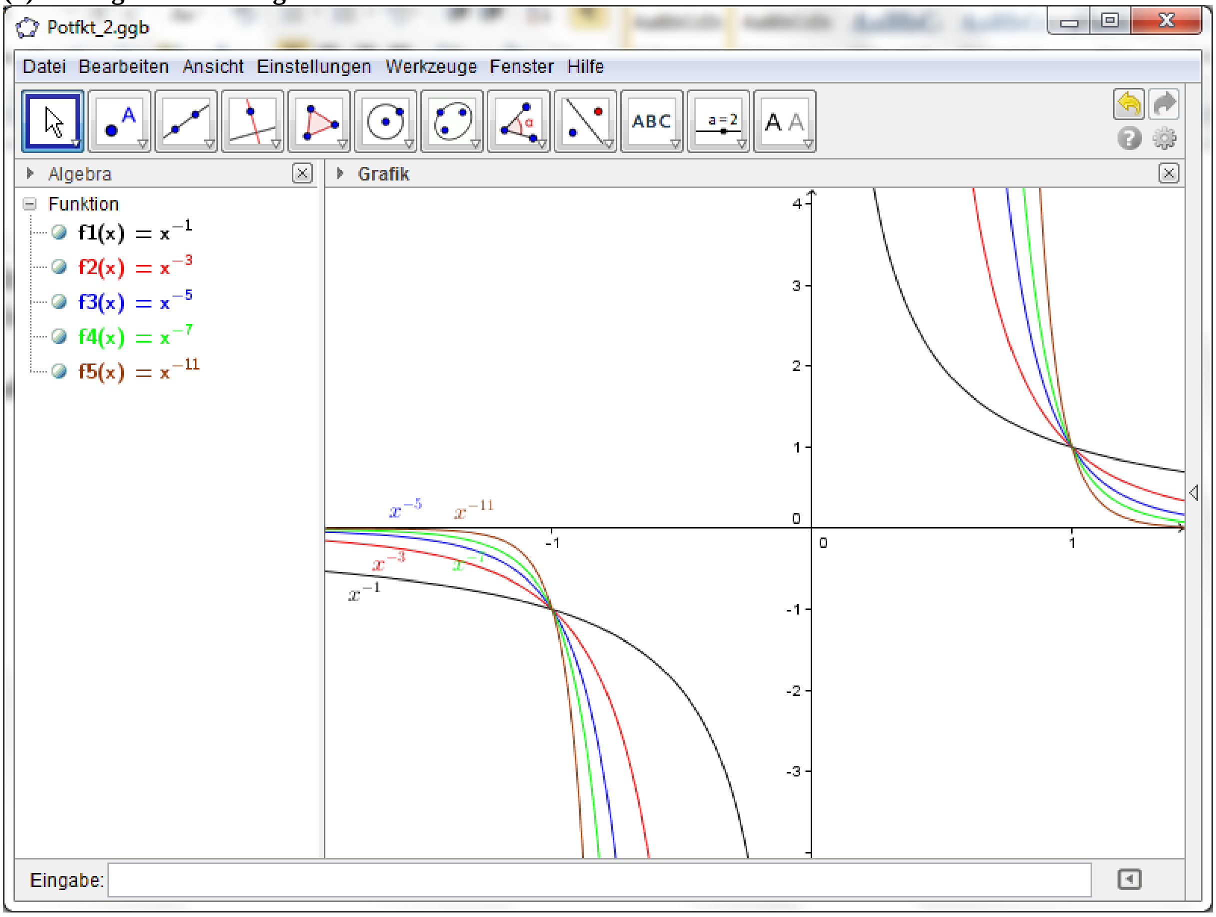
$f_1(x) = x^1$ Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten.
Je grösser *n*, desto gestreckter oberhalb von 1 bzw. gestauchter unterhalb von 1.
Je grösser *n*, desto gestreckter unterhalb von –1 bzw. gestauchter oberhalb von –1.
Vergleich mit (1): Linke Seite gespiegelt an der *x*-Achse, negative Werte.
Parabeln *n*-ten Grades, *n* ungerade.
Symmetrisch zum Nullpunkt.

(3) *n* gerade und negativ



Gestreckt, gestaucht analog (siehe Graphik).
Hyperbeln.
Symmetrisch zur *y*- Achse.

(4) *n* ungerade und negativ



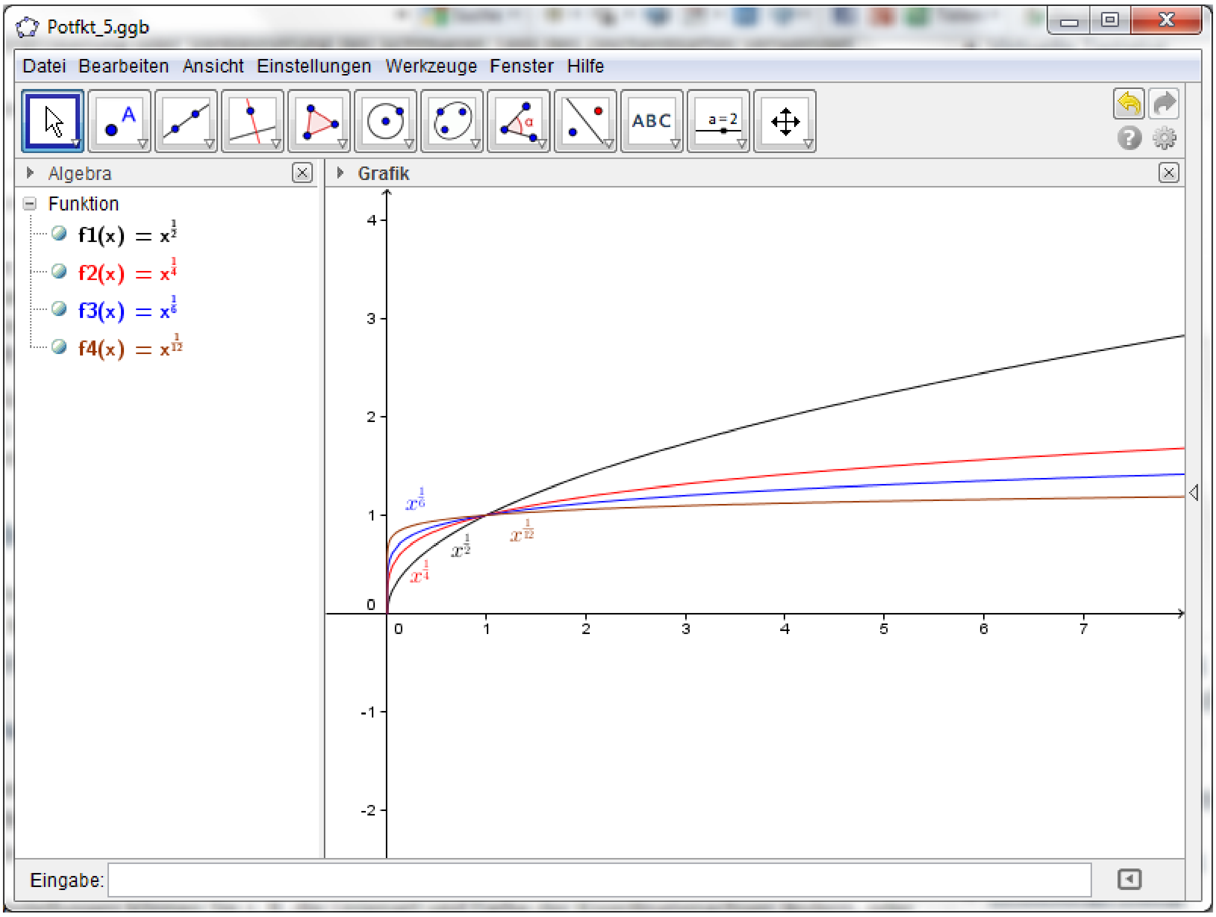
Gestreckt, gestaucht analog (siehe Graphik).
Hyperbeln.
Symmetrisch zum Nullpunkt.

KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

(5) Weitere Graphiken

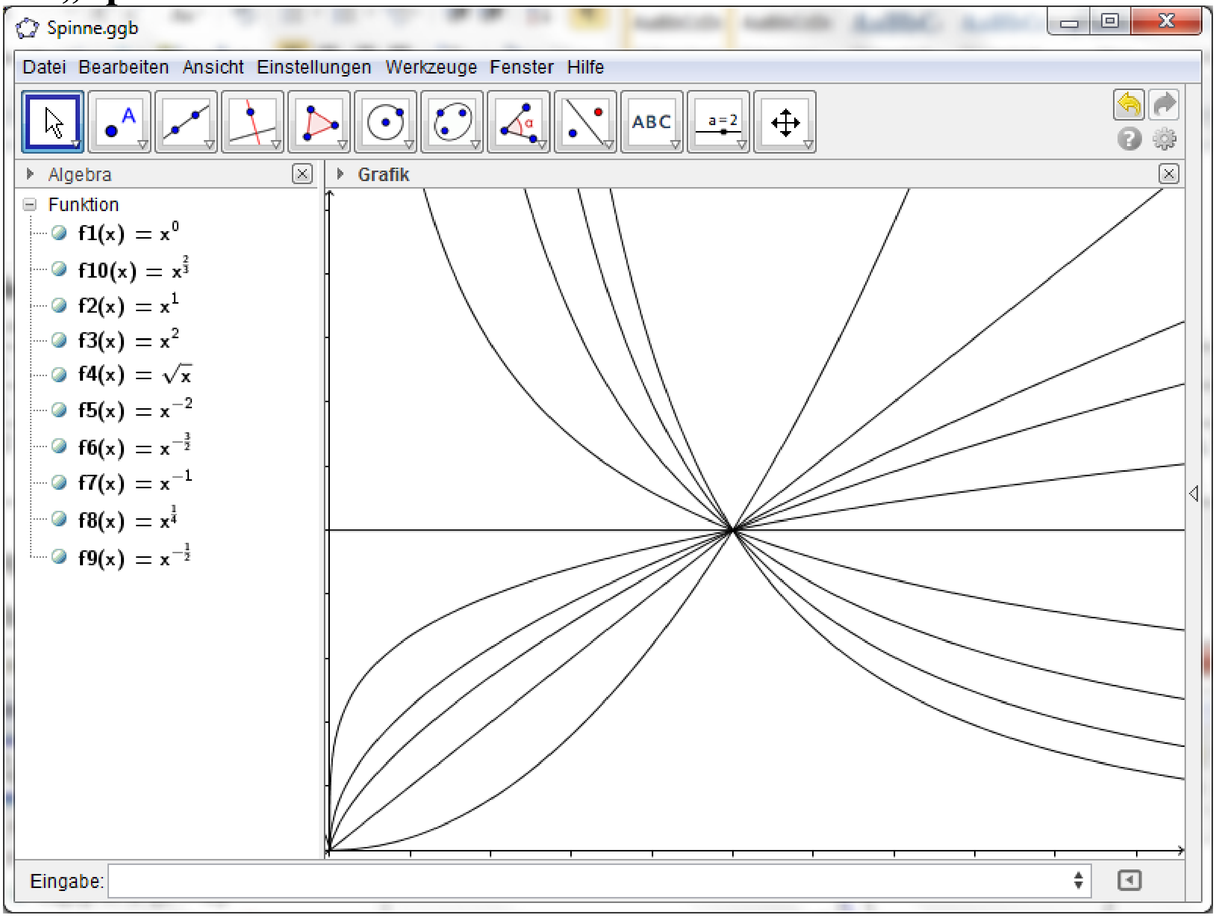
$n \in \mathbb{Q}$ **und** $|n| < 1$



Wurzelfunktionen.

D) Zusammenfassung

„Spinne“



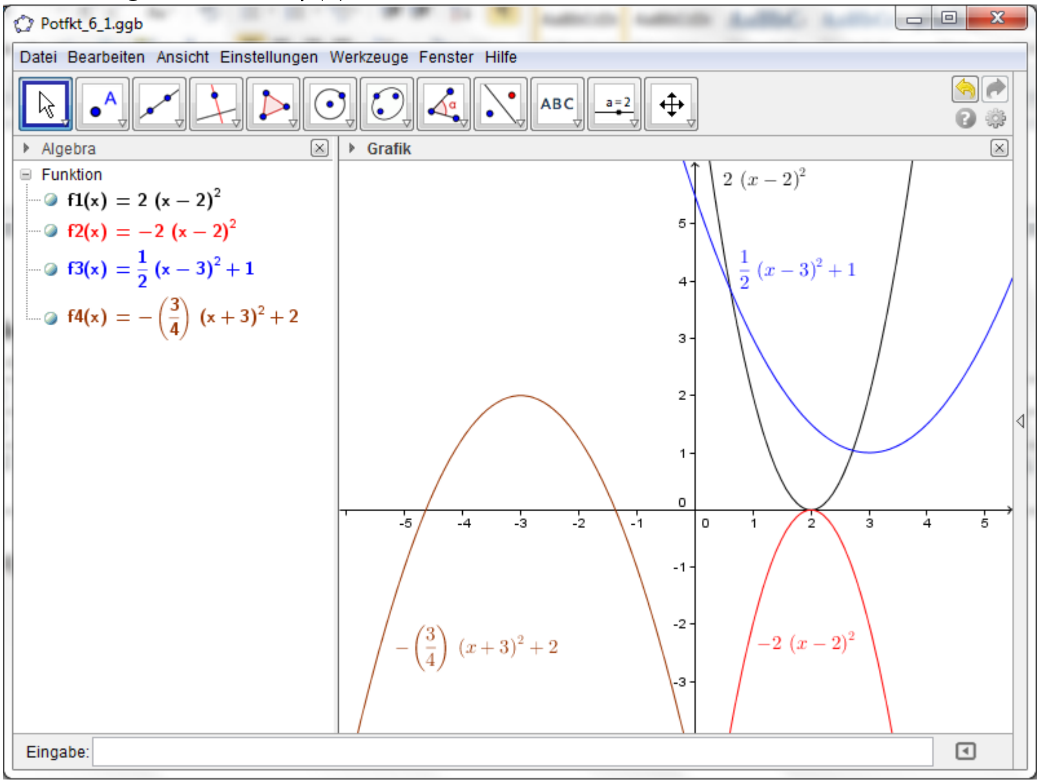
E) Bedeutung der Parameter a, b, x_0

$f(x) = a \cdot (x - x_0)^n + b$

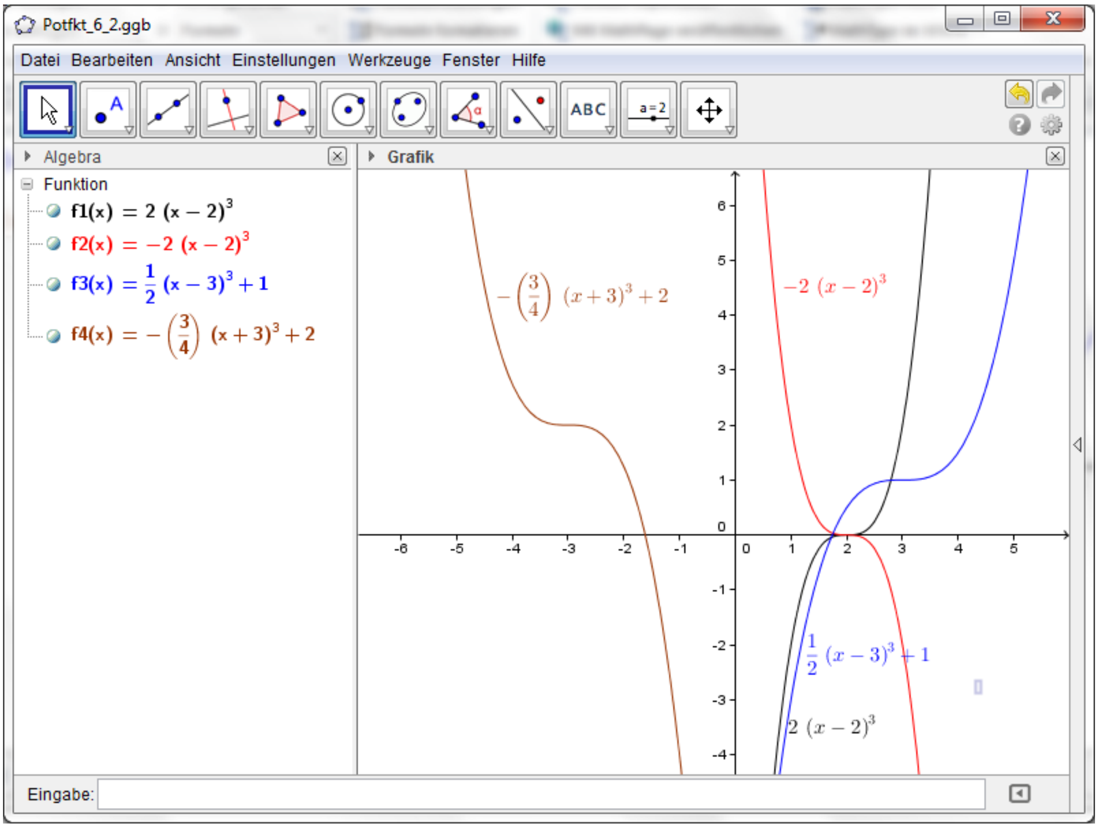
a	Streckung bzw. Stauchung. Spiegelung.
b	Verschiebung entlang der y- Achse. Nach oben oder unten.
x_0	Verschiebung entlang der x-Achse. Wenn z.B. +2 um 2 Einheiten nach links verschoben. Wenn –2 um 2 Einheiten nach rechts verschoben.

Beispiele

Veränderung der Funktion $f(x) = x^2$



Veränderung der Funktion $f(x) = x^3$



Kantonale Fachschaft Mathematik

Aufgaben mit Musterlösungen

Aufgabe 1

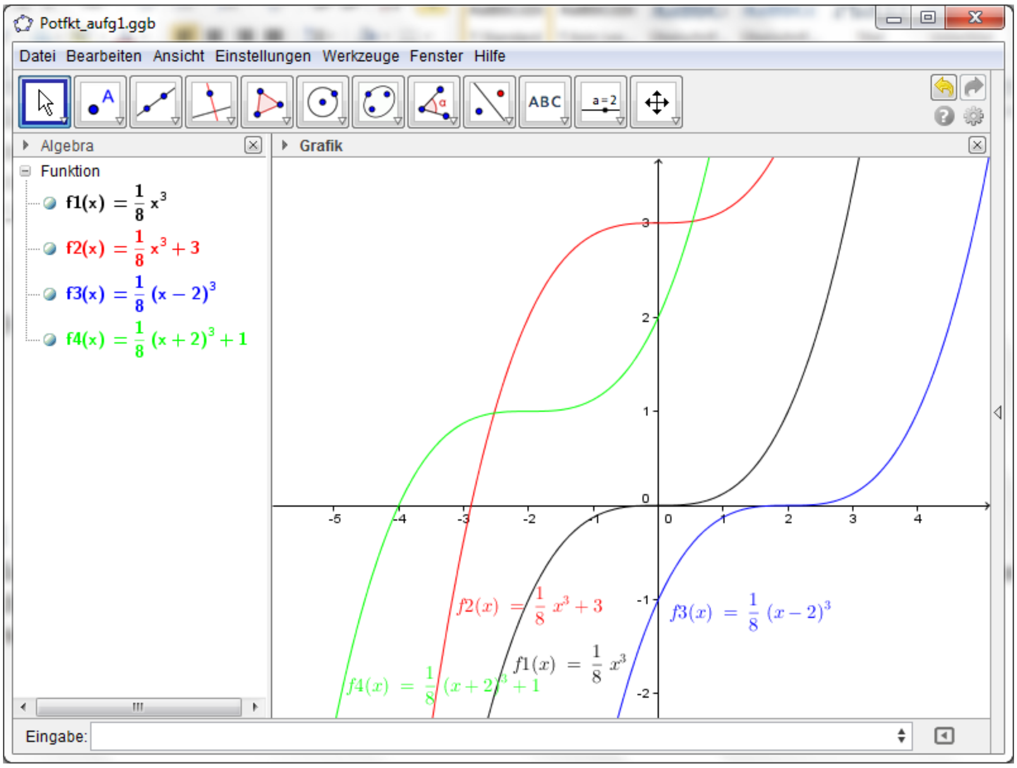
f: $x \mapsto y = \frac{1}{8}x^3$.

Verschieben Sie die Kurve *f*

a) um 3 Einheiten nach oben
b) um zwei Einheiten nach rechts
c) um zwei Einheiten nach links und anschliessend um 1 Einheit nach oben
und geben Sie die Gleichung der verschobenen Kurve an.

Lösung

a) $y = \frac{1}{8}x^3 + 3$ b) $y = \frac{1}{8}(x-2)^3$ c) $y = \frac{1}{8}(x+2)^3 + 1$



Aufgabe 2

f: $y = 0,5x + 1$ *g*: $y = x^3$ *h*: $y = x^{-2} + 3$

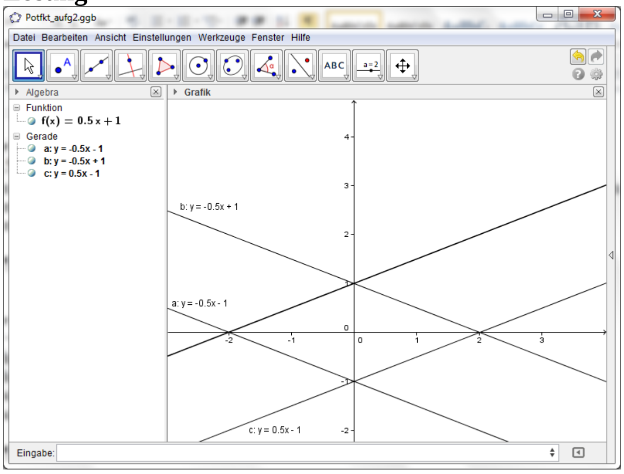
Zeichnen Sie die drei Kurven in verschiedene Koordinatensysteme (Einheit:1 Häuschen) und spiegeln Sie jede

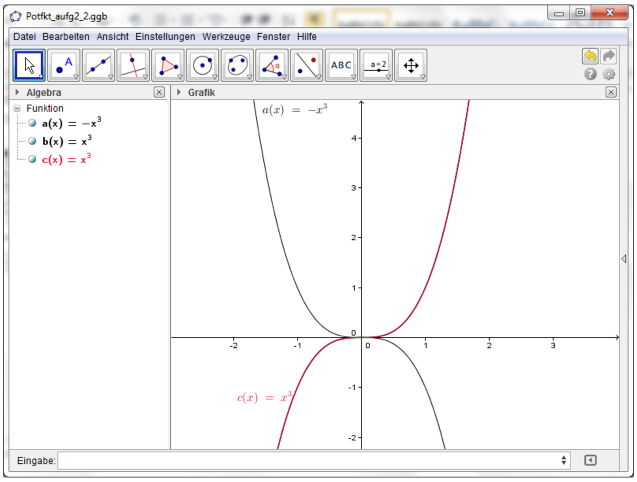
a) an der *x*-Achse   b) an der *y*-Achse   c) am Nullpunkt

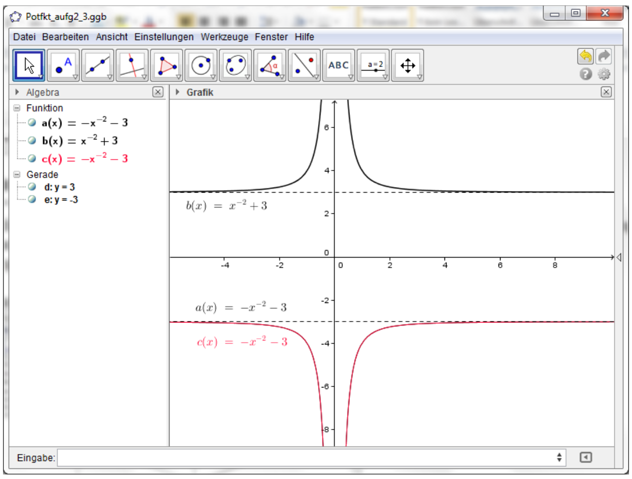
und geben Sie sodann die Gleichung der gespiegelten Kurve an.

Kantonale Fachschaft Mathematik

Lösung







Aufgabe 3

$f\colon y = x^{-1} - 2 \quad g\colon y = 4 - x^{-1}$

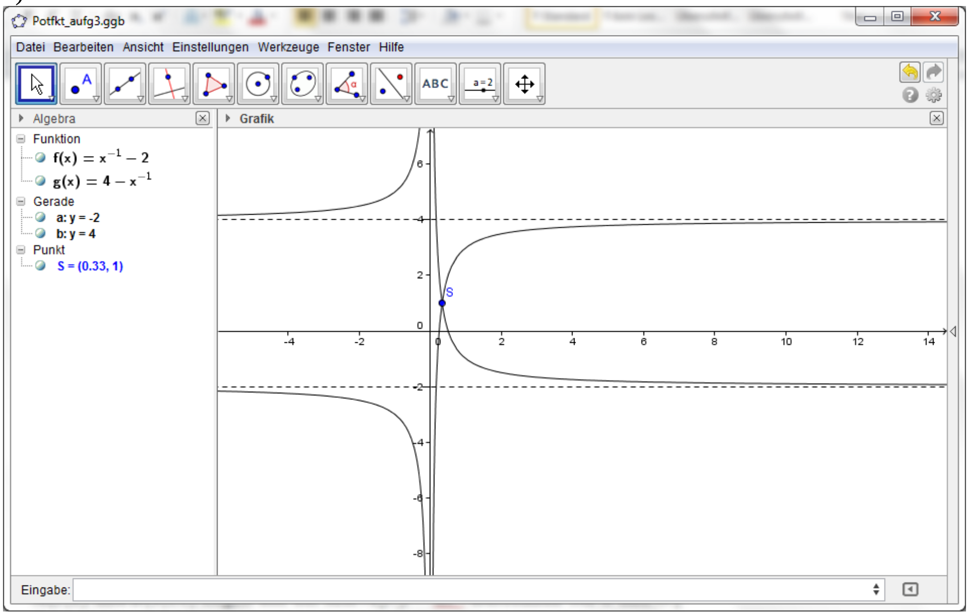
a) Zeichnen Sie die beiden Kurven zugleich in ein Koordinatensystem. (Einheit: 2 Häuschen)

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse.

c) Wo schneiden sich f und g Berechnen Sie diesen Schnittpunkt S.

Lösung

a)



b) Schnittpunkte mit der x-Achse: D.h. $y = 0$.

$$f\text{: } x^{-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow N_f(0.5/0).$$

$$g\text{: } 4 - x^{-1} = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow N_g(0.25/0).$$

c) Gleichungen gleichsetzen:

$$x^{-1} - 2 = 4 - x^{-1} \Leftrightarrow 2x^{-1} = 6 \Leftrightarrow x^{-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow S\left(\frac{1}{3}/1\right)$$

Aufgabe 4

Der Punkt $P(4,8)$ liegt auf der Kurve f: $y = (x + a)^{-3}$. Berechnen Sie a.

Lösung

Ein Punkt, welcher auf einem Graphen liegt, erfüllt die Funktionsgleichung, d.h. wenn $x = 4$ ist muss $y = 8$ sein.

Also: $f(4) = 8 \Leftrightarrow 8 = (4 + a)^{-3} \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{(4+a)^3} \Leftrightarrow (4+a)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow 4 + a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -3.5$

Aufgabe 5

$A(7,1)$ und $B(1,-1)$ liegen auf der Kurve f: $y = a(x + b)^{-1}$. Berechnen Sie a und b.

Lösung

Wie Aufgabe 4, aber beide Punkte erfüllen die Funktionsgleichung. D.h. man erhält ein Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} A(7/1) & 1 = a(7+b)^{-1} \\ B(1/-1) & \underline{-1 = a(1+b)^{-1}} \end{array}$$

$$a = 7 + b = -1 - b \Leftrightarrow 2b = -8 \Leftrightarrow b = -4 \Rightarrow a = 3$$

Das Gleichungssystem wurde mit dem Gleichsetzungsverfahren gelöst. D.h. beide Gleichungen wurden nach a aufgelöst und dann gleichgesetzt.

Aufgabe 6

$A(3,1)$ und $B(6,16)$ liegen auf der Kurve f: $y = ax^n$. Berechnen Sie a und n.

Lösung
Analog Aufgabe 5, aber mit Einsetzungsverfahren gelöst.

$A(3/1) \quad 1 = a \cdot 3^n \quad (I)$

$B(6/16) \quad \underline{16 = a \cdot 6^n \quad (II)}$

(I) nach a aufgelöst: $a = \frac{1}{3^n}$

In (II) eingesetzt: $16 = \frac{1}{3^n} \cdot 6^n = \left(\frac{6}{3}\right)^n = 2^n$

Also: $16 = 2^n \Leftrightarrow 2^4 = 2^n \Rightarrow (\textit{Exponentenvergleich})\ n = 4$

Aus $a = \frac{1}{3^n}$ folgt dann $a = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

Aufgabe 7
f: $y = \ x^n + 2{,}5 g$: $y = \ x^m - 5$
Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $S(2,3)$. Berechnen Sie n und m.

Lösung
Der Punkt $S(2/3)$ erfüllt beide Gleichungen.

$3 = 2^n + 2.5 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2^n \Leftrightarrow 2^{-1} = 2^n \Rightarrow n = -1$

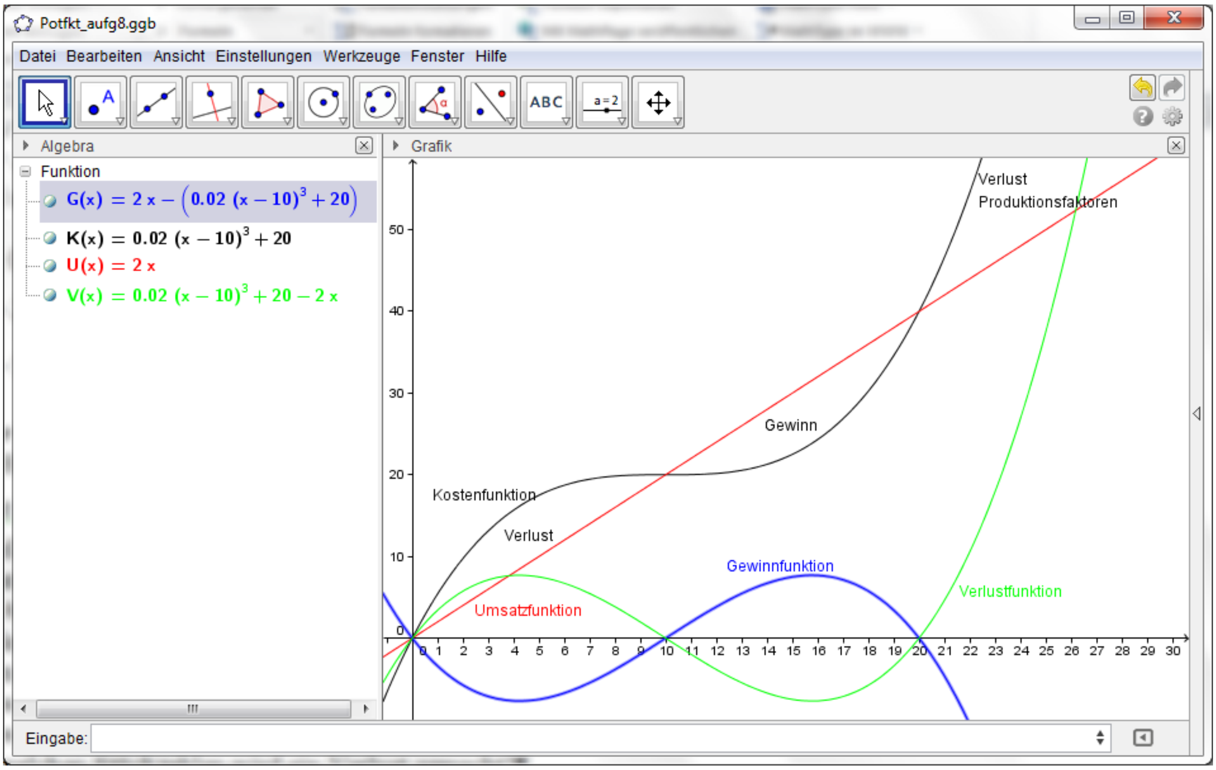
$3 = 2^m - 5 \quad \Leftrightarrow 8 = 2^m \Leftrightarrow 2^3 = 2^m \Rightarrow m = 3$

Aufgabe 8
Bei der Herstellung von x Spielautos entstehen Gesamtkosten von $K(x)$ Franken.
Dabei ist $K(x) = 0.02\left(x - 10\right)^3 + 20$.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle mit x-Werten zwischen 0 und 22 und skizzieren Sie den Graphen für die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Stückzahl.
b) Der Artikel wird für Fr. 2.- pro Spielauto verkauft. Wie gross sind die Einnahmen, wenn x Stück verkauft werden? Zeichnen Sie in das vorhandene Koordinatensystem den Graphen für die Gesamteinnahmen ein.
c) Lesen Sie aus dem Graphen ab und berechnen Sie, wenn möglich:
   Bei welchen Stückzahlen wird ein Gewinn erzielt?
   Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am grössten?
   Bei welchen Stückzahlen wird ein Verlust gemacht?

Kantonale Fachschaft Mathematik

Lösung



a) Siehe Graphik $K(x)$.
b) Siehe Graphik Umsatzfunktion $U(x) = 2x$.
c) Bei welchen Stückzahlen wird ein Gewinn erzielt? Stückzahlen zwischen 10 und 20. (Umsatzfunktion oberhalb Kostenfunktion).
Berechnung der Schnittpunkte von $K(x)$ und $U(x)$:

$$2x=\left[0.02\left(x-10\right)^3+20\right] \Leftrightarrow 2x=\left[0.02\left(x^3-30x^2+300x-1000\right)+20\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x=\left[0.02x^3-0.6x^2+6x-20+20\right] \Leftrightarrow 2x=0.02x^3-0.6x^2+6x \Leftrightarrow 0.02x^3-0.6x^2+4x=0$$

$$x\left(0.02x^2-0.6x+4\right)=0$$

Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Also:
$x=0 \;\Rightarrow S_1(0/0)$ und

$$0.02x^2-0.6x+4=0 \Leftrightarrow 0.02\left(x^2-30x+200\right)=0 \Leftrightarrow 0.02\left(x-10\right)\left(x-20\right)=0$$

$$\Rightarrow x_2=10; x_3=20 \Rightarrow S_2(10/20) \text{ und } S_3(20/40)$$

Oder auch:
Schnittpunkte der Gewinnfunktion (oder auch Verlustfunktion) mit der x-Achse berechnen:
$G(x)=U(x)-K(x)=-0.02x^3+0.6x^2-4x=0$. Die Gewinnfunktion muss oberhalb der x-Achse liegen.

Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am grössten?
Abgelesen: 16. Maximum der Gewinnfunktion.
Berechnung: Kann mit der 1. Ableitung berechnet werden. Erklärung folgt noch. Siehe Differentialrechnung.

Bei welchen Stückzahlen wird ein Verlust gemacht?
Wenn man weniger als 10 Stücke und mehr als 20 Stücke produziert macht man Verlust. Siehe Graphik.

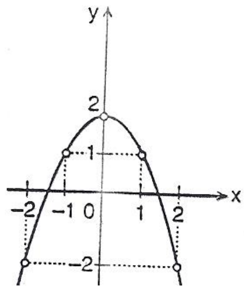
KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

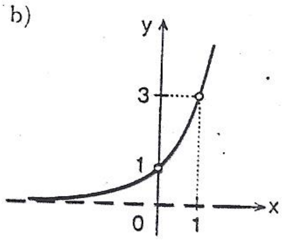
Aufgabe 9
Welche Graphen stellen Potenzfunktionen dar? Bestimmen Sie anhand der Skizze die Funktionsgleichung.

1.

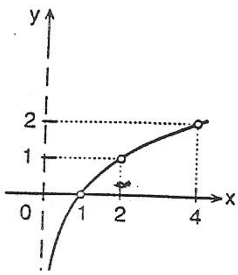
a)



b)

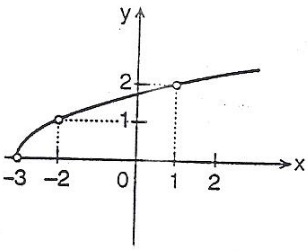


c)

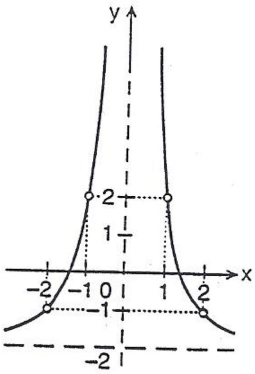


2.

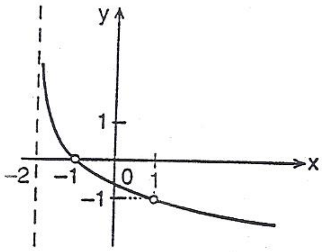
a)



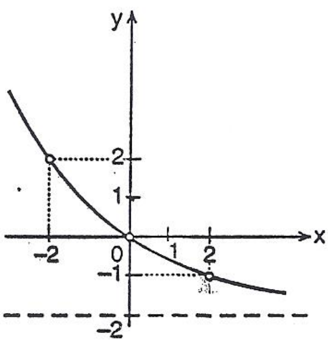
b)



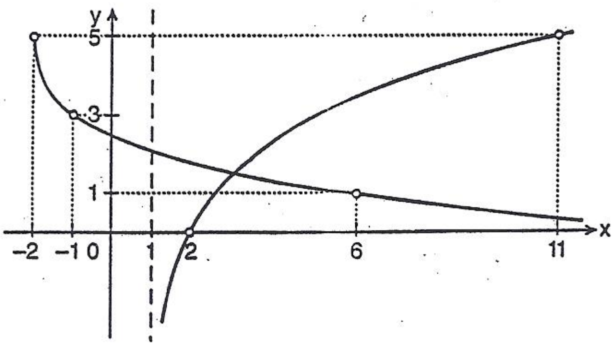
c)



3. a)

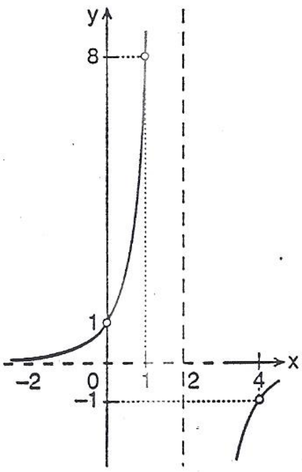


b)

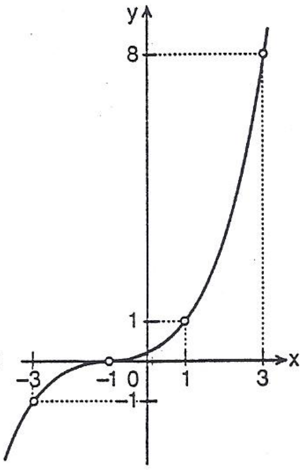


c)

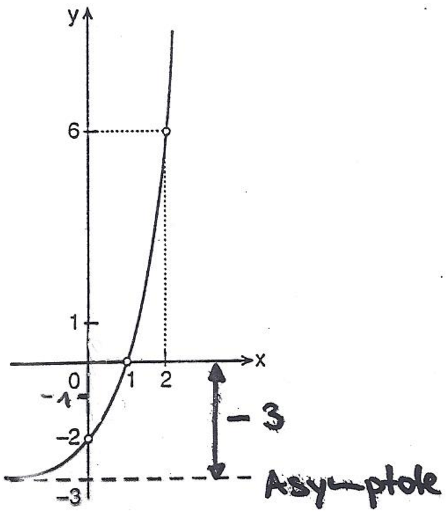
4. a)



b)



c)



Lösungen

Potenzfunktionen haben die Form: $f(x) = a \cdot (x - x_0)^n + b$.

1.a) Potenzfunktion mit n gerade, positiv. Weder gestreckt noch gestaucht $a = 1$ oder -1. 2 nach oben verschoben $b = 2$ und nach unten geöffnet, d.h. a negativ, a also -1.

$f(x) = -x^2 + 2$

1.b) Exponentialfunktion, also keine Potenzfunktion. Ersichtlich an der Asymptote.

$f(x) = 3^x$

1.c) Logarithmusfunktion, also keine Potenzfunktion. Ersichtlich an der senkrechten Asymptote.

$f(x) = \log_2 x$

2.a) Potenzfunktion bzw. Wurzelfunktion, d.h. Exponent ist eine Bruchzahl. 3 nach links verschoben, also $(x+3)^n$. Weder gestreckt noch gestaucht da von „Scheitelpunkt" aus (1/1) enthalten.

Also $f(x) = (x+3)^n$. Punkt einsetzen um n zu berechnen. Z.B. (1/2):

$2 = (1+3)^n \Leftrightarrow 2 = 4^n \Leftrightarrow 2 = 2^{2n} \Rightarrow (\textit{Exponentenvergleich})\ 1 = 2n \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}$

$f(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+3}$

2.b) Potenzfunktion. Hyperbel, also n gerade (da symmetrisch y-Achse) und n negativ. 2 Einheiten nach unten verschoben, also b = –2.

$f(x) = ax^n - 2$. $a = 4$, da wenn man bei der Asymptote (von $x = 0$ aus) eins nach rechts geht, geht es 4 nach oben. Man könnte auch mit Einsetzen des Punktes (1/2) auf das kommen.

Also bis jetzt: $f(x) = 4x^n - 2$

Um n auszurechnen noch ein Punkt einsetzen. Z.B. (2/-1):

$-1 = 4 \cdot 2^n - 2 \Leftrightarrow 1 = 4 \cdot 2^n \Leftrightarrow 1 = 2^2 \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^{-2} = 2^n \Rightarrow n = -2$.

Also: $f(x) = 4x^{-2} - 2 = \frac{4}{x^2} - 2$

2.c) Logarithmusfunktion. $f(x) = -\log_3(x+2)$.

3.a) Exponentialfunktion.

3.b) Potenzfunktion bzw. Wurzelfunktion. n ungerade und Bruchzahl. a negativ (da gespiegelt) und –2 (wenn man beim „Scheitelpunkt" 1 nach rechts geht, geht es 2 nach unten. $b = 5$ da 5 nach oben verschoben. Und $x_0 = -2$, da zwei nach links verschoben.

Also: $f(x) = -2(x+2)^n + 5$.

Punkt einsetzen um n zu berechnen: z.B. (6/1):

$1 = -2(6+2)^n + 5 \Leftrightarrow -4 = -2 \cdot 8^n \Leftrightarrow 2 = 8^n \Leftrightarrow 2 = 2^{3n} \Rightarrow (\textit{Exponentenvergleich})\ 3n = 1 \Leftrightarrow n = \frac{1}{3}$.

Also: $f(x) = -2(x+2)^{\frac{1}{3}} + 5 = -2\sqrt[3]{x+2} + 5$

3.c) Logarithmusfunktion. $f(x) = 5 \cdot \log_{10}(x-1)$.

4. Erklärungen, Ideen wie in Aufgaben 1.–3.

4.a) Potenzfunktion. Hyperbel und symmetrisch zum Nullpunkt, also n ungerade und negativ. 2 nach rechts verschoben.

$f(x) = -8(x-2)^{-3} = \frac{-8}{(x-2)^3}$

4.b) Potenzfunktion. $f(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3$.

4.c) Exponentialfunktion. $f(x) = 3^x - 3$.