Repetitionsaufgaben: Stereometrie

Zusammengestellt von
Bruno Wyrsch, Michael Güntensperger (KS Seetal; Zylinder, Kugel und Kegel)
Guido Köpfli und Fabian Glötzner (KS Schüpfheim/Gymnasium Plus; Quader, Prisma, Pyramide, zusammengesetzte Aufgaben)
Kathrin Rimer und Fabian Glötzner (KS Beromünster, KS Schüpfheim, Theorie)

Inhaltsverzeichnis

Lernziele zu Zylinder, Kugel und Kegel: 2
Kurztheorie 3
Aufgaben zu Quader, Prisma und Pyramide 10
    Musterlösungen zu den Aufgaben zu Quader, Prisma, Pyramide 11
Zylinderaufgaben 12
    Lösungen Zylinderaufgaben 12
    Musterlösungen Zylinderaufgaben 13
Kegelaufgaben 15
    Lösungen Kegelaufgaben 15
Kugelaufgaben 16
    Lösungen Kugelaufgaben 16
    Musterlösungen Kugelaufgaben 17
Zusammengesetzte Aufgaben zur Stereometrie 18
    Musterlösungen zu den zusammengesetzten Aufgaben zur Stereometrie 19

Lernziele zu geradlinig begrenzten Körpern:

- Sie bestimmen Volumen und Oberfläche von Pyramiden, Prismen und Quadern aus Angaben von Seitenlängen bzw. Radien.
- Sie lösen Formeln zur Oberflächen-, Mantel- und Volumenberechnung nach beliebigen Grössen auf und berechnen diese Grössen.
- Sie erläutern die Herleitung und den Aufbau der Formeln zur Oberflächen-, Mantel- und Volumenberechnung.
- Sie entwickeln Formeln für spezielle Körper (z.B. Tetraeder) durch Herleitung aus bekannten Formeln.
- Sie skizzieren Körper perspektivisch sinnvoll und korrekt.
- Sie berechnen Oberfläche und Volumen von Körpern, indem Sie sie in mehrere bekannte Teilkörper zerlegen.
- Sie benennen und beschreiben die fünf Platonischen Körper.

Grundwissen

- Sie wenden die Formeln zur Berechnung der Höhe und der Fläche im gleichseitigen Dreieck an.
- Sie rechnen Raum- und Hohlmasse ineinander um.
- Sie wenden das Archimedische Prinzip an.

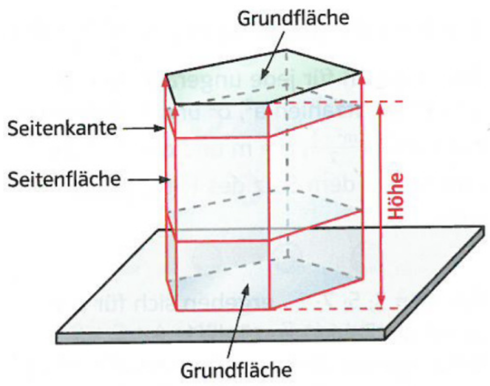
Lernziele zu Zylinder, Kugel und Kegel:

- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von zylindrischen Körpern anwenden.
- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von kegelartigen Körpern anwenden.
- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von Kugeln anwenden.
- Sie können den relativen und absoluten Fehler von Messgrössen berechnen.

Kurztheorie

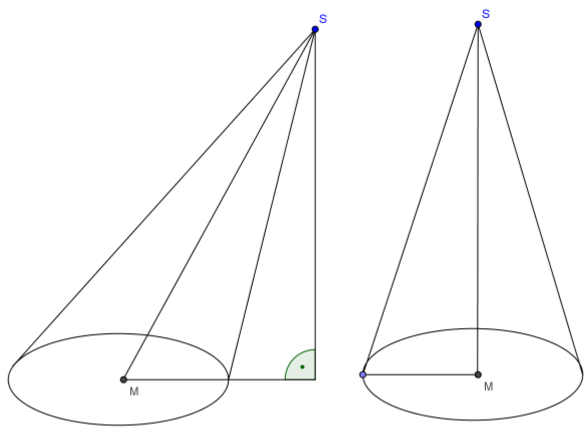
Definitionen

Volumen: Rauminhalt: Wie viel braucht es um etwas zu füllen
Einheit: mm^3, cm^3, dm^3, m^3, km^3
Oberflächen: Wie viel braucht es, um etwas einzupacken?
Einheit: mm^2, cm^2, dm^2, m^2, km^2
Mantel: Oberfläche ohne Grundflächen (siehe Skizze unten).



Für viele Figuren gibt es vorgegebene Formeln, die man verwenden kann (vergleiche Tabelle unten). Grundflächen und die Oberflächen müssen aber oft von Hand berechnet werden, in dem man die Fläche in bekannte Figuren wie Drei- und Vierecke einteilt.

Weiter werden viele Figuren in „gerade“ und „schief“ unterteilt. Ein „gerader Kegel“ (rechts) ist beispielsweise ein Kegel, bei welchem die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Von einem „schiefen Kegel“ (links) spricht man, wenn die Spitze nicht senkrecht über dem Mittelpunkt liegt. In diesem Fall wird die Höhe als Abstand zwischen der erweiterten Grundfläche und der Spitze gemessen.

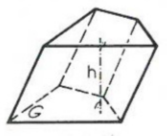
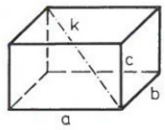
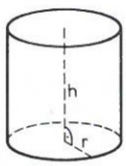
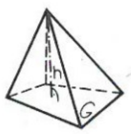
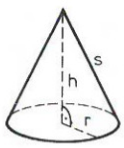


Abkürzungen:

a, b, c: Seiten
s: Mantellinie
M: Mantelfläche

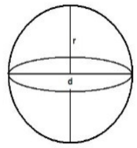
h: Höhe des Körpers
O: Oberfläche
V: Volumen

r: Radius
G: Grundfläche

Form und Definition	Formeln
Prisma 	$V = G \cdot h$
Spezialfall: **Quader** (Schuhschachtel) Ein gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche. 	$V = abc$ $O = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$
Spezialfall: **Würfel** Ein Quader mit gleichlangen Seiten	Bei einem Würfel gilt: $a = b = c$ $V = a^3$ $O = 6a^2$
Zylinder 	$\mathrm{V} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{h} = \mathrm{r}^2\pi \cdot \mathrm{h}$ Für gerade Zylinder gilt zudem: $\mathrm{O} = 2\mathrm{r}^2\pi + 2\mathrm{r}\pi\mathrm{h} = 2\mathrm{r}\pi(\mathrm{r} + \mathrm{h})$
Pyramide 	$V = \dfrac{G \cdot h}{3}$
Kegel 	$V = \dfrac{G \cdot h}{3} = \dfrac{r^2\pi \cdot h}{3}$ Für gerade Kegel gilt zudem: $O = \pi r(r + s)$ $M = \pi rs$

Abkürzungen:

a, b, c: Seiten
s: Mantellinie
M: Mantelfläche
h: Höhe des Körpers
O: Oberfläche
V: Volumen
r: Radius
G: Grundfläche

Kugel 	$V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ $O = 4\pi r^2$

➔ Eine Figur kann auch aus verschiedenen Formen zusammengesetzt sein

Masseinheiten:

Für die Umrechnung der Masseinheiten gilt:

$1000mm^3 = 1cm^3$
$1000cm^3 = 1dm^3$
$1000dm^3 = 1m^3$

Wenn man Schwierigkeiten mit der Umrechnung von Masseinheiten hat, dann können die Umrechnungstabellen helfen:

Tabelle für Längen

km	100m	10m	m	dm	cm	mm
			0,	0	1, 1 1	0, 0

Vorgehen:

1.) Schreibe die gegebene Einheit rechtsbündig in die Spalte mit der gegebenen Einheit.

2a.) Möchte man in eine **grössere Einheit** umrechnen, dann füllt man die linken Spalten mit Nullen auf und setzte zwischen der gesuchten und der nächst kleineren Einheit ein Komma.
2b.) Möchte man in eine **kleinere Einheit** umrechnen, dann füllt man die Spalten bis zur gesuchten Einheit mit Nullen auf.

Beispiele: Wenn man 1cm hat, schreibt man diesen in die entsprechende Spalte und hat zwischen cm und mm ein Komma, also 1cm = 1,0 cm. Nun möchte man diesen cm in mm umrechnen und füllt die mm- Spalte mit einer Null auf. Somit hat man 10 mm. Möchte man 1 cm in m umrechnen, so setzt man zwischen m und dm ein Komma und füllt die m- und dm-Spalte mit Nullen auf und bekommt 0,01 m.

Tabelle für Flächen

km^2		$(100m)^2$		$(10m)^2$		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
							0,	0 7	0 1	0	1, 1 1	0	0

Möchte man Flächeneinheiten umrechnen, dann besitzt jede Einheit zwei Spalten („hoch zwei“→ zwei Spalten). Diese Tabelle funktioniert analog zur Tabelle für Längen. Die Einheiten werden rechtsbündig eingetragen. Möchte man $1cm^2$ in mm^2 umrechnen, so ergibt das $100mm^2$. Möchte man $1\ cm^2$ in m^2 umrechnen, so erhält man $0{,}0001m^2$.

$100mm^2=1cm^2=0{,}1dm^2=0{,}0001m^2=0{,}0000000001km^2$

Ein anderes Beispiel:

$0{,}71m^2= 71dm^2=7100cm^2=710000mm^2$ ($=0{,}00000071km^2$)

Tabelle für Volumen

km^3			$(100m)^3$			$(10m)^3$			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											0,	0	0 7	0 1	0	0	1, 1 1	0	0	0

Auch diese Tabelle funktioniert analog zu den anderen Tabellen, nur hat jetzt jede Einheit 3 Spalten („hoch drei“ → drei Spalten). Somit gilt:

$1000mm^3=1cm^3=0{,}001dm^3=0{,}000001m^3=0{,}000000000000001km^3$
$71000000mm^3= 71000cm^3=71dm^3=0{,}071m^3=0{,}000000000071km^3$

Umrechnen in Liter:

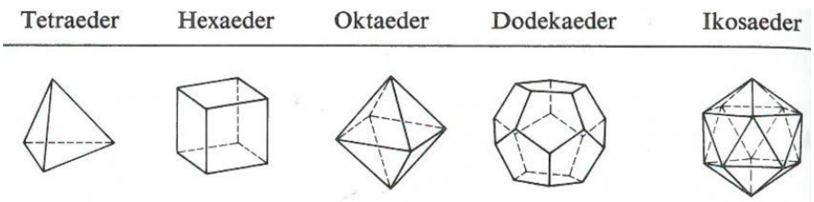
1 Liter entspricht $1dm^3$ Volumen

Folgende **Begriffe** werden in verschiedenen Masseinheiten immer wieder gebraucht:

Kilo: Tausend (1 **Kilo**gramm= 1000 Gramm) Hekto: Hundert Deka: Zehn Zenti: ein Hundertstel (1 Zentimeter= ein hundertstel Meter) Milli: ein Tausendstel

Regelmässige Polyeder: Die fünf Platonischen Körper

Es gibt genau fünf vollkommen gleichmässige konvexe Körper. Gleichmässig heisst in diesem Zusammenhang, dass alle Seiten gleichlang, alle Aussenwinkel gleich gross und alle Aussenflächen kongruent sind. Diese Körper kann man in Pyramiden unterteilen (besonders deutlich ist dies beim Oktoader, das aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche besteht). So kann man das Volumen dieser Körper berechnen.

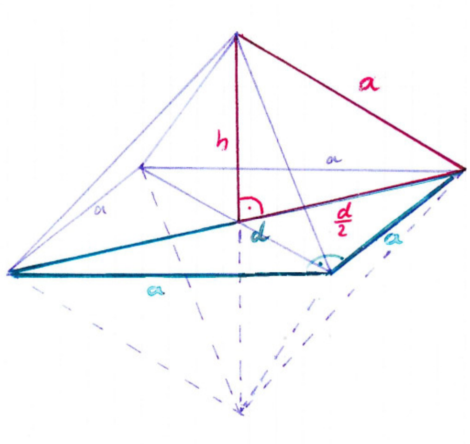


Beispielaufgabe 1: Bestimmung der Volumenformel eines Oktaeders mit Seitenlänge a:

Berechnen Sie den Volumeninhalt eines Oktaeders mit Seitenlänge a.

Lösung:
Bestimmung der Höhe h einer der beiden Pyramiden aus denen das Oktaeder zusammengesetzt ist:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$



dabei ist d die Diagonale der quadratischen Grundfläche der Pyramide, die auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden kann:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$

Setzt man d in die Gleichung oben ein, erhält man:

$\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$, vereinfacht: $\frac{a^2}{2} + h^2 = a^2$

Diese Gleichung wird nach h aufgelöst:

$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ und damit $h = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Nun kann man die Ergebnisse in die Volumenformel für die Pyramide $V_{Pyr} = \frac{G \cdot h}{3}$ einsetzen:

$$V_{Pyr} = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot a^3 \overset{*}{=} \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3$$

* Steht eine Wurzel im Nenner, erweitert man den Bruch mit dieser Wurzel. Das erleichtert das häufig weitere Rechnen mit dem Ergebnis.

Da das Oktaeder aus zwei Pyramiden besteht muss das Volumen noch verdoppelt werden:

$$V_{Oktaeder} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3}}$$

Das Volumen des Oktaeders beträgt $\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$.

Beispielaufgabe 2:
Bei einer regelmässigen, geraden, vierseitigen Betonpyramide beträgt eine Länge der Grundfläche a=4dm. Die Pyramide ist h=30cm hoch. Daneben befindet sich eine Betonkugel, welche genau gleich schwer wie die Pyramide ist. Wie gross ist die Oberfläche der Kugel?

Lösung:
Da die Pyramide und die Kugel gleich schwer sind und aus dem gleichen Material bestehen, haben die beiden Körper dasselbe Volumen. Man hat von der Kugel keine Angaben, ausser dass das Volumen gleich viel beträgt wie bei der Pyramide. Somit muss man das Volumen der Pyramide berechnen.
Aus der Aufgabenstellung kennt man von der Pyramide Seitenlänge der Grundfläche und die Höhe. Die beiden Angaben sind in verschiedenen Einheiten. Bevor man mit dem Rechnen beginnt, sollten alle Längen in dieselbe Einheit umgerechnet werden. Hier wird die Einheit Dezimeter gewählt. Somit ist die Höhe der Pyramide h=30cm=3dm.
Um nun das Volumen der Pyramide berechnen zu können, muss die Grundfläche ermittelt werden. Die Pyramide ist regelmässig, das bedeutet, dass die Grundfläche quadratisch ist:

$$G = a^2 = 4^2 = 16\left[dm^2\right]$$

Somit ist das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{16 \cdot 3}{3} = 16\left[dm^3\right]$$

Nun weiss man, dass auch die Kugel ein Volumen von V=16dm^3 besitzt. Mit dieser Angabe kann der Radius r der Kugel berechnet werden:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = 16\left[dm^3\right]$$

Die Formel muss umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3}{3} &= 16 && | \cdot \frac{3}{4\pi} \\ r^3 &\approx 3.82 && | \sqrt[3]{} \\ r &\approx 1.56\left[dm\right] \end{aligned}$$

Wenn man nun den Radius der Kugel kennt, kann die Oberfläche der Kugel berechnet werden:

$$O = 4r^2\pi \approx 4 \cdot 1.56^2 \cdot \pi \approx 30.6\left[dm^2\right]$$

Die Kugel besitzt eine Oberfläche von etwa 30.6dm^2.

Beispielaufgabe 3:

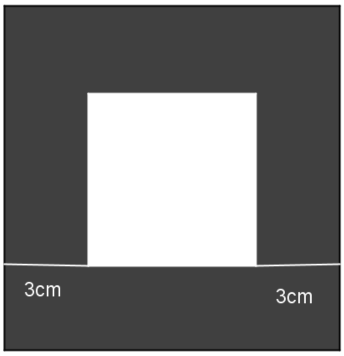
Ein Würfel mit Seitenlänge 60cm wird aus Holz hergestellt und ist innen hohl. Die Holzbretter sind 3cm dick. Wie schwer ist der Würfel, wenn das Holz eine Dichte von 0,5 g/cm^3 aufweist?

Lösung:
Man berechnet zuerst das Volumen des Würfels mit Seitenlänge 60cm, wenn er ausgefüllt wäre.

Volumen Würfel mit der Seitenlänge 60cm beträgt

$$V = a^3 = 60^3 = 216000[cm^3]$$

Nun möchte man das Holzvolumen berechnen. Dazu muss man wissen, wie gross der Hohlraum im Würfel ist.



Berechnung Volumen Hohlraum:
Jede Seite wird rechts und links um je 3cm verkürzt, somit ist der innere Leerraum würfelförmig mit Seitenlängen

$$60 - 3 - 3 = 54[cm].$$

Volumen Hohlraum: $54^3 = 157464[cm^3]$

Man kann vom ganzen Würfel den Hohlraum subtrahieren und bekommt das mit Holz gefüllte Volumen:

$$216000 - 157464 = 58536[cm^3]$$

Nun muss das Volumen in das Gewicht umgerechnet werden. Aus der Aufgabenstellung haben wir die Angabe, dass das verwendete Holz eine Dichte von 0,5 g/cm^3 aufweist. Das bedeutet, dass 1cm^3 Holz genau 0,5g schwer ist. Nun haben wir 58536cm^3 Holz, daher ist das Gewicht des Würfels:

$$58536 \cdot 0.5 = 29268[g]$$

In der Mathematik und Physik soll das Resultat in einer passenden Einheit angegeben werden. Hier macht es Sinn, das Resultat in Kilogramm umzurechnen (1kg=1000g):

29268g entspricht somit 29,268kg

Somit ist dieser Würfel 29,3 kg schwer.

Aufgaben zu Quader, Prisma und Pyramide

Aufgabe 1
Ein regelmässiges sechseckiges Prisma hat eine Grundkantenlänge a=4cm und eine Körperhöhe h=9cm. Berechne Volumen und Oberfläche dieses Körpers.

Aufgabe 2
Eine grosse Wanne ist vollständig mit Wasser gefüllt. Nun wird ein Holzwürfel von 15cm Kantenlänge (Dichte 0,4g/cm^3) sorgfältig in diese Wanne gelegt. Wie viele Milliliter Wasser werden dabei überlaufen?

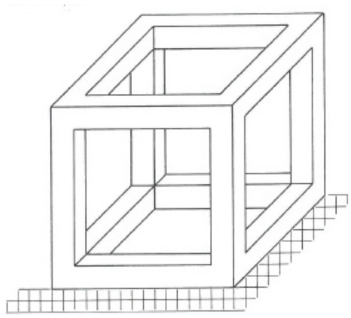
Aufgabe 3
a) Ein Tetraeder (Pyramide aus vier gleichseitigen Dreiecken) besitzt eine Kantenlänge a = 5cm. Berechne die Oberfläche dieses Tetraeders.

b) Zeige durch allgemeine Herleitung wie man auf die Volumenformel $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ für das Tetraeder kommt, wenn die Kantenlänge mit a bezeichnet wird.

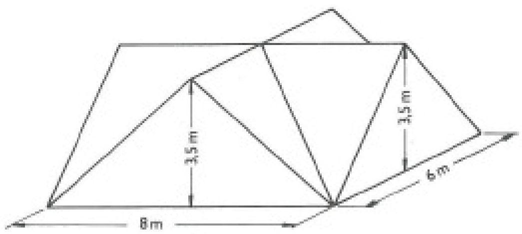
Aufgabe 4
a) Berechne das Volumen und die Oberfläche einer regelmässigen quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge a=7cm und der Körperhöhe h=25cm.

b) Berechne das Volumen und die Oberfläche einer regelmässig quadratischen Pyramide allgemein, wenn die Grundkantenlänge a und die Körperhöhe das Vierfache der Grundkante beträgt.

Aufgabe 5
Dieser würfelförmige Körper mit 8cm Aussenkantenlänge ist aus Profilstäben mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge 1,2cm) hergestellt. Welche Masse besitzt er, wenn das Material eine Dichte von 2,7g/cm^3 aufweist?



Aufgabe 6
Ein Hausdach besteht geometrisch betrachtet aus zwei geraden Prismen, welche sich schneiden. Berechne das Volumen des darunterliegenden Dachstuhls und die mit Ziegeln bedeckte Dachfläche.



Aufgabe 7
Ein v-förmiger Kanal mit symmetrischem Querschnitt besitzt eine Breite von 4m und eine Tiefe von 2,5m. Welche Fläche von Betonplatten sind zur Auskleidung dieses Kanals pro 10m Länge notwendig?

Aufgabe 8
Löse die Oberflächenformel $A = 2(ab + ac + bc)$ eines Quaders mit den Kanten a, b und c nach der Seite a auf.

Aufgabe 9
Zwei Würfel aus Knetmasse haben die Kantenlängen a=5cm beziehungsweise b=9cm. Jetzt wird daraus ein einziger Würfel geformt. Welche Kantenlänge besitzt dieser?

Musterlösungen zu den Aufgaben zu Quader, Prisma, Pyramide

Aufgabe 1

$$V = G \cdot h = 6 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 9 = 216\sqrt{3} \approx \underline{\underline{374{,}12\left[\text{cm}^3\right]}}$$

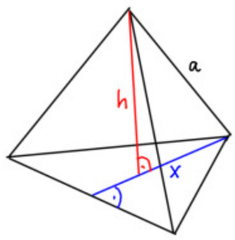
$$O = 2 \cdot G + 6 \cdot ah = 12 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot 4 \cdot 9 = 48\sqrt{3} + 216 \approx \underline{\underline{299{,}14\left[\text{cm}^2\right]}}$$

Aufgabe 2

$$M = 15^3 \cdot 0{,}4 = \underline{\underline{1350\,[\text{g}]}}$$

$$V = 1350\,\text{cm}^3 = 1350\,\text{ml} = \underline{\underline{1{,}35\,\text{l}}}$$

Aufgabe 3



a) $O = 4 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3} = 25\sqrt{3} \approx \underline{\underline{43{,}30\left[\text{cm}^3\right]}}$

b) $x = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \cdot a$

$$h = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{9}a^2 \cdot 3} = \sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}\,a$$

$$V = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \tfrac{\sqrt{6}}{3}a = \tfrac{\sqrt{18}}{36}a^3 = \tfrac{3\sqrt{2}}{36}a^3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3}}$$

Aufgabe 4

a) $V = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3} \cdot 49 \cdot 25 \approx \underline{\underline{408{,}33\left[\text{cm}^3\right]}}$

$$h' = \sqrt{25^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{637{,}25} \approx 25{,}24\,[\text{cm}]$$

$$O = G + 4 \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot h' \approx \underline{\underline{402{,}41\left[\text{cm}^2\right]}}$$

b) $V = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 4a = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}}}a^3$

$$O = G + 4 \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot h' = a^2 + 2a \cdot \sqrt{(4a)^2 + (\tfrac{a}{2})^2} = a^2 + 2a \cdot \sqrt{16{,}25a^2} = a^2 + 2a \cdot \sqrt{16{,}25} \cdot a$$

$$= a^2 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{16{,}25} \cdot a^2 = a^2 + \sqrt{65} \cdot a^2 = \underline{\underline{\left(1 + \sqrt{65}\right)a^2}}$$

Aufgabe 5

$$V = 8^3 - (8 - 2 \cdot 1{,}2)^3 - 6 \cdot (8 - 2 \cdot 1{,}2)^2 \cdot 1{,}2 = 8^3 - 5{,}6^3 - 6 \cdot 5{,}6^2 \cdot 1{,}2 \approx \underline{\underline{110{,}6\left[\text{cm}^3\right]}}$$

Aufgabe 6

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3{,}5 \cdot 6 + \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3{,}5 \cdot 8 - \tfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3{,}5 = \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3{,}5 = \tfrac{2}{3} \cdot 168 = \underline{\underline{112\left[\text{m}^3\right]}}$$

$$A = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{6}{2} \cdot \sqrt{3{,}5^2 + (\tfrac{8}{2})^2} + 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{2} \cdot \sqrt{3{,}5^2 + (\tfrac{6}{2})^2} = 6 \cdot \sqrt{3{,}5^2 + 4^2} + 8 \cdot \sqrt{3{,}5^2 + 3^2} \approx \underline{\underline{68{,}77\left[\text{m}^2\right]}}$$

Aufgabe 7

$$A = 2 \cdot \sqrt{(\tfrac{4}{2})^2 + 2{,}5^2} \cdot 10 = 2 \cdot \sqrt{10{,}25} \cdot 10 = 10\sqrt{41} \approx \underline{\underline{64{,}03\left[\text{m}^2\right]}}$$

Aufgabe 8

$A = 2(ab + ac + bc)$; $A = 2ab + 2ac + 2bc$; $A - 2bc = 2a(b + c)$

$$\frac{A - 2bc}{2(b + c)} = a$$

Aufgabe 9

$$c = \sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{125 + 729} = \sqrt[3]{854} \approx 9{,}49\,[\text{cm}]$$

Zylinderaufgaben

1) Berechne den Inhalt des Mantel und der Oberfläche und das Volumen eines geraden Kreiszylinders, wenn gegeben sind (Runde auf zwei Nachkommastelle):
   a) r = 7 cm, h = 12 cm
   b) V = 56.55 m^3, h = 8 m
2) Auf einem Messzylinder sollen Markierungsstriche für 1cl angeben werden. Wie weit müssen diese Striche auseinander sein, wenn der innere Durchmesser des Zylinders 30mm beträgt. (Runde auf eine Nachkommastelle)
3) Eine Datenleitung besteht aus 3 Glasfaserkabeln von je 0.4dm Durchmesser. Wie viel Tonnen wiegen 10km Leitung, wenn die Dichte eines Glasfaserkabels 2.58g/cm^3 beträgt.
4) Wie dick muss ein Kupferdraht von der Dichte 8.9 g/cm^3 sein, damit ein Stück von 1cm Länge 5g wiegt.
5) Der Grimselstausee fasst rund 100 Millionen m^3 Wasser. In wie vielen Tagen entleert ihn der zylindrische Ableitungsstollen in den Gelmersee, wenn dieser Stollen im Durchmesser 2.6m misst? Das Wasser fliesst mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 3m/s ab.
6) Absoluter und relativer Fehler bei Messgrössen
   Sie wollen das Volumen eines geraden Kreiszylinders (z.B. eine Ovomaltinebüchse) berechnen. Bei ihrer Messung können Sie die beiden Grössen auf 0.2cm genau messen. Sie erhalten für den Radius $r = 2.4 \pm 0.2\text{cm}$ und für die Höhe $h = 5.0 \pm 0.2\text{cm}$.
   a) Berechne den absoluten Fehler (die absolute Messunsicherheit) für das Volumen des Körpers auf zwei geltende Ziffern genau (geltende Ziffern heisst: z.B. 93.8cm=94cm)
   b) Wie viel beträgt der relative Fehler für den Radius r, für die Höhe h und für das Volumen V?
   c) Wie lauten die Rechenregeln für das Multiplizieren/Dividieren von mehreren Messgrössen, die mit Messunsicherheiten behaftet sind?

Lösungen Zylinderaufgaben

1) *a) M = 527.79 cm^2, O = 835.67 cm^2 , V = 1847.26 cm^3*
   b) r = 1.5m, M = 75.40 cm^2 , O = 89.54 cm^2
2) *Die Messstriche sind 14.1 mm auseinander.*
3) *Das Kabel wiegt 389.05 t.*
4) *Das Stück müsste 0.85 cm dick sein.*
5) *Die Entleerung würde 73 Tage (72.66 Tage) dauern.*
6) *a) Der absolute Fehler F beträgt 18.5cm^3.*
   b) Die relativen Fehler f betragen f_{Radius}=8.33%, $f_{Höhe}$ = 4%, $f_{Volumen}$=20.56%
   c) Die relativen Fehler der einzelnen Messgrössen werden addiert!

Musterlösungen Zylinderaufgaben

1a)

$$M_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$M_{Zylinder} = 2 \cdot 7 \cdot \pi \cdot 12$$
$$M_{Zylinder} = 168\pi$$
$$\underline{\underline{M_{Zylinder} = 527.79\ cm^2}}$$

$$O_{Zylinder} = M_{Zylinder} + 2 \cdot A_{Grundfläche}$$
$$O_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$$
$$O_{Zylinder} = 168\pi + 2 \cdot 7^2 \cdot \pi$$
$$O_{Zylinder} = 168\pi + 98\pi$$
$$O_{Zylinder} = 266\pi$$
$$\underline{\underline{O_{Zylinder} = 835.66\,cm^2}}$$

$$V_{Zylinder} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{Zylinder} = 7^2 \cdot \pi \cdot 12$$
$$V_{Zylinder} = 588\pi$$
$$\underline{\underline{V_{Zylinder} = 1847.26\,cm^3}}$$

1b)

$$V_{Zylinder} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$A_{Grundfläche} = \frac{V_{Zylinder}}{h}$$
$$A_{Grundfläche} = \frac{56.55}{8}$$
$$A_{Grundfläche} = 7.06875\,cm^2$$
$$\underline{A_{Grundfläche} = 7.07\,cm^2}$$

$$A_{Grundfläche} = r^2\pi$$
$$r^2 = \frac{A_{Grundfläche}}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{A_{Grundfläche}}{\pi}}$$
$$r = \sqrt{\frac{7.07}{\pi}}$$
$$\underline{r = 1.50\,cm}$$

$$M_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$M_{Zylinder} = 2 \cdot 1.50 \cdot \pi \cdot 8$$
$$M_{Zylinder} = 24\pi$$
$$\underline{\underline{M_{Zylinder} = 75.40\ cm^2}}$$

$$O_{Zylinder} = M_{Zylinder} + 2 \cdot A_{Grundfläche}$$
$$O_{Zylinder} = 24\pi + 2 \cdot 7.07$$
$$\underline{\underline{O_{Zylinder} = 89.54\,cm^2}}$$

2) Die Messstriche sind 14.1 mm auseinander.

3)

$$V_{Leitung} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$V_{Leitung} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{Leitung} = 0.4^2 \cdot \pi \cdot 100'000$$
$$V_{Leitung} = 16'000\pi$$
$$\underline{V_{Leitung} = 50265.48\,dm^3}$$

$$3 \cdot V_{Leitung} = 150'796.45\,dm^3$$
$$\underline{V_{Alle\ Leitungen} = 150'796'447.37\,cm^3}$$

$$Masse = Dichte \cdot Volumen$$
$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 2.58 \cdot 150'796'447.37$$
$$m = 389054834.22\,g$$
$$\underline{\underline{m = 389.05\,t}}$$

Die Kabel wiegen 389.05 Tonnen.

4) Das Stück müsste 0.85 cm dick sein.

5) Die Entleerung würde 73 Tage (72.66 Tage) dauern.

6a) *Im ungünstigsten Fall ergibt sich das minimale / maximale Volumen wie folgt:*

$V_{min} = \quad r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.2^2 \cdot \pi \cdot 4.8\ cm^3 = 72.99\ cm^3 = 73\ cm^3$

$V_{max} = \quad r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.6^2 \cdot \pi \cdot 5.2\ cm^3 = 110.43\ cm^3 = 110\ cm^3$

$V_{mittel} = 2.4^2 \cdot \pi \cdot 5\ cm^3 = 90.48\ cm^3 = 90\ cm^3$

$\Rightarrow$ *der Wert für das Volumen kann zwischen 73cm und 110 liegen (Differenz 37* cm^3 *).*

$\Rightarrow$ *das Volumen des Zylinders beträgt somit V=90* $cm^3 \pm 18.5\ cm^3$.

Die absolute Messunsicherheit von 18.5 cm^3 *hat also einen Anteil von 20.56% an den 90* cm^3.

6b) *der relative Fehler f für den Radius r, die Höhe h und das Volumen ergibt sich:*

$$f_{Radius\ r} = \quad \frac{F}{r} = \frac{0.2}{2.4} = 8.33\%$$

$$f_{Höhe\ h} = \quad \frac{F}{h} = \frac{0.2}{5} = 4\%$$

$$f_{Volumen\ V} = \quad \frac{F}{V} = \frac{18.5}{90} = 20.56\%$$

Um den relativen Fehler für die Volumenberechnung zu berechnen geht man wie folgt vor:

$$f_{Volumen\ V} = 2 \cdot 8.33\%\ \ (rel.\ Fehler\ von\ \ r\ im\ Quadrat\ !) + 4\%\ (rel.\ Fehler\ von\ \ h) = 20.66\%$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen 20.56% und 20.66%
ergibt sich durch Rundungsdifferenzen bei der Berechnung des aboluten Fehlers.

6c) *Um das Volumen V des Zylinders zu berechnen, müssen die Messgrössen „Radius r“ und „Höhe h“ multipliziert werden. Um die Messunsicherheit des Volumens bestimmen zu können, braucht man folgende Rechenregeln:*
$\Rightarrow$ *“Bei der Multiplikation und Division von mehreren Messgrössen werden die relativen Fehler der einzelnen Messgrössen addiert!“*

$$f_{Volumen\ V} = \quad f_{Radius\ r} + f_{Radius\ r} + f_{Höhe\ h}$$

Kegelaufgaben

1) Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen der folgenden Kreiskegel:
   a) r=5 cm, h=16cm
   b) r=6cm, s=10cm

2) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a=15cm und b=8cm rotiert um die Kathete a. Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des entstandenen Kegels!

3) Eine Sanduhr in Gestalt eines Doppelkegels ist soeben umgedreht worden. Aller Sand befindet sich wieder im oberen Teil und hat dort selbst die Gestalt eines geraden Kreiskegels mit Grundkreisradius r=4.2cm und Höhe h=10cm. Der Sand rinnt nun gleichmässig nach unten, und nach einiger Zeit hat die Höhe des oben befindlichen Sandkegels um 3 cm abgenommen.
   a) Wie viele cm^3 Sand sind in der Sanduhr?
   b) Wie viele cm^3 Sand sind bereits hinuntergerieselt?
   c) Wie viele Minuten sind verstrichen, während denen die Höhe des Sandkegels um jene 3cm zurückging, wenn die ganze Sandmenge in einer Stunde nach unten rinnt?

4) Ein gerader Kreiskegel hat einen Radius r=10cm. Der aufgerollte Mantel bildet einen Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 135°.
   a) Berechne den Inhalt des Mantels und die Oberfläche des Kegels!
   b) Drücke den Inhalt des Mantels mit Hilfe von r aus!

Lösungen Kegelaufgaben

1) a) *s=16.76cm,* $M = \pi \cdot r \cdot s = 263.31cm^2$, $O = \pi \cdot r \cdot s + r^2\pi = 341.85cm^2$, $V=48.88cm^3$
   b) *h=8cm,* $M = 188.50cm^2$, $O = 301.59cm^2$, $V = 301.59cm^3$
2) *r=8cm, h=15cm, s=17cm,* $M = 427.26\ cm^2$, $O = 628.32cm^2$, $V = 1005.31cm^3$.
3) a) $V=184.73cm^3$,
   b) $dV=V-V'=184.73cm^3-63.36\ cm^3=121.37\ cm^3$; *mit r'=2.94cm (Strahlensatz)*
   c) *Annahme: gleichmässiger Durchgang des Sandes pro Minute:*
      $dV/min=184.73\ cm^3 / 60min = 3.08\ cm^3\ /min$
      Zeitdauer $t= dV / (dV/min) = 184.73\ cm^3 / 3.08\ cm^3\ /min = 39.42min$
4) *a) Schneidet man den Kegel entlang seiner Mantellinie s auf und rollt ihn auf eine Ebene ab, so entsteht der Kreissektor mit Radius s und Zentriwinkel 135°. Die Bogenlänge b des Kreissektors ist* $b = 2 \cdot \pi \cdot r$. *Würde der Kreissektor zu einem ganzen Kreis ergänzt, hätte der Kreisumfang den Betrag* $U = 2 \cdot \pi \cdot s$.
   $$\frac{b}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} = \frac{r}{s} = \frac{135°}{360°} = \frac{3}{8} \qquad \Rightarrow s = r \cdot \frac{8}{3} = 10 \cdot \frac{8}{3} = 26.67cm$$
   $$M = \pi \cdot r \cdot s = 837.76\ cm^2, \quad O = r^2 \cdot \pi + M = 314.16\ cm^2 + 837.76\ cm^2 = 1151.92\ cm^2,$$
   b) $M = \pi \cdot r \cdot \frac{8 \cdot r}{3} = \frac{8 \cdot \pi \cdot r^2}{3}$

Kugelaufgaben

1) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt einer Kugel mit Umfang u = 60 mm.

2) Berechne Umfang und Oberflächeninhalt einer Kugel mit Volumen V = 1 m^3.

3) Das Planetarium in Verkehrshaus Luzern hat eine halbkugelförmige Kuppel, deren Grundfläche 250 m^2 misst. Die Kuppel muss neu mit einer Speziallackierung gestrichen werden. Wie viel m^2 müssen gestrichen werden?

4) Wie viel Gramm wiegt eine Hohlkugel aus Gold (Dichte 19.29 g/cm^3) mit einem Aussendurchmesser von 32mm und einem Innendurchmesser von 20mm.

5) Eine Hohlkugel aus Zinn mit 22mm Wandstärke und 180mm Aussendurchmesser soll zu einer Kugel umgegossen werden. Berechne den Durchmesser der Kugel.

6) Statt eines grossen Gasballons mit einem Fassungsvermögen von 600m^3 sollen aus der gleichen Menge Ballonseide sechs kleinere Ballone hergestellt werden. Wie viel Gas braucht es, um alle kleinen Ballone zu füllen.

7) Fünf sehr zerbrechliche Glaskugeln mit Durchmesser d = 48mm sollen in einer zylinderförmigen Kartonröhre transportiert werden. Diese Röhre ist mit Schaumstoff ausgekleidet. Der Abstand von der Kugel zur Röhre beträgt 5mm; der Abstand zwischen zwei Kugeln ist doppelt so gross. Berechne die Kartonmenge und die Schaumstoffmenge.

8) Ein Sportartikelhersteller möchte in China eine 5kg schwere Hantel aus Grauguss (Dichte 7.2 kg/dm^3) herstellen lassen. Die Gewichte sollen die Form einer Kugel haben. Wie dick wird das Verbindungsstück?

Lösungen Kugelaufgaben

1) *O = 1144.91 mm^2 , V = 3647.56 mm^3*
2) *u = 3.9 m, O = 4.83 m^3*
3) *O = 500 m^2*
4) *Die Masse beträgt 250.16 g.*
5) *d = 149.13 mm*
6) *V = 244.95 m^3 (r = 5.23 m eines kleinen Ballons)*
7) *Kartonmenge = 52841.59 mm^2; Schaumstoffmenge 476673.85 mm^3*
8) *d = 4.48 cm*

Musterlösungen Kugelaufgaben

1)

$u = 2 \cdot r \cdot \pi$

$r = \frac{u}{(2 \cdot \pi)}$

$r = \frac{60}{(2 \cdot \pi)}$

$\underline{r = 9.55\ mm}$

$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

$O_{Kugel} = 4 \cdot 9.55^2 \cdot \pi$

$\underline{\underline{O_{Kugel} = 1145.92\, mm^2}}$

$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$

$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot 9.55^3 \cdot \pi}{3}$

$\underline{\underline{V_{Kugel} = 3647.56\, mm^3}}$

2)

$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$

$3 \cdot V_{Kugel} = 4 \cdot r^3 \cdot \pi$

$r^3 = \frac{3 \cdot V_{Kugel}}{(4 \cdot \pi)}$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{Kugel}}{(4 \cdot \pi)}}$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1}{(4 \cdot \pi)}}$

$\underline{r = 0.62\ m}$

$u = 2 \cdot r \cdot \pi$

$u = 2 \cdot 0.62 \cdot \pi$

$\underline{\underline{r = 3.90\ m}}$

$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

$O_{Kugel} = 4 \cdot 0.62^2 \cdot \pi$

$\underline{\underline{O_{Kugel} = 4.84\, m^2}}$

3) O = 500 m^2

4)

$V_{Hohlkugel} = V_{Aussenkugel} - V_{Innenkugel}$

$V_{Hohlkugel} = \frac{4 \cdot (r_{Aussenradius})^{3} \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (r_{Innenradius})^{3} \cdot \pi}{3}$

$V_{Hohlkugel} = \frac{4 \cdot (16)^{3} \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (10)^{3} \cdot \pi}{3}$

$V_{Hohlkugel} = 17157.28 - 4188.79$

$\underline{V_{Hohlkugel} = 12968.49\, mm^3} = 12.97\, cm^3$

$Masse = Dichte \cdot Volumen$

$m = \rho \cdot V$

$m = 19.29 \cdot 12.97$

$\underline{\underline{m = 250.16\, g}}$

Die Hohlkugel aus Gold wiegt genau 250.16 Gramm.

5) *d = 149.13 mm*

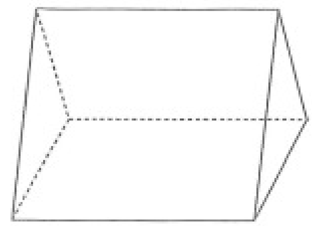
6) V_{Ballon} = 244.95 m^3 (r = 5.23 m eines kleinen Ballons)

7) Kartonmenge = 52841.59 mm^2; Schaumstoffmenge 476673.85 mm^3

8) d = 4.48 cm

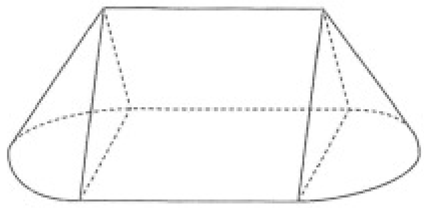
Zusammengesetzte Aufgaben zur Stereometrie

Aufgabe 1



Ein Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seiten Länge a = 4 cm. Die Höhe des Prismas ist doppelt so groß wie die Grundseitenlänge a.

a) Berechne das Volumen des Prismas.



b) An den beiden Dreiecksflächen werden Kegelhälften (wie aus der Skizze ersichtlich) angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des neuen Körpers.

c) Um wie viel Prozent sind das Volumen und die Größe der Oberfläche des neuen Körpers größer als

Aufgabe 2

Aus einem pyramidenförmigen Holzstück, dessen Grundfläche ein Quadrat mit 10cm Seitenlänge ist und dessen Höhe 15 cm beträgt, soll ein möglichst grosser Kegel geschliffen werden. Welches Volumen wird dabei (mindestens) vom Holzstück abgeschliffen? Welchem Anteil am Volumen des ursprünglichen Holzstückes entspricht das?

Musterlösungen zu den zusammengesetzten Aufgaben zur Stereometrie

Aufgabe 1

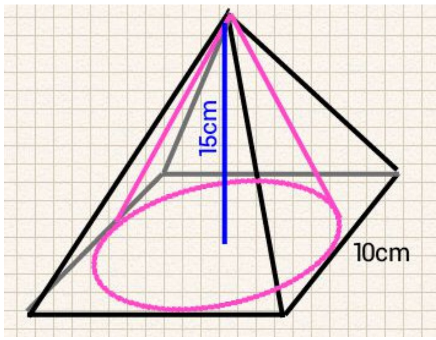
a) $V = Gh = \tfrac{1}{2}a \cdot h_{\text{Grundfläche}} \cdot h_{\text{Prisma}} = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 2a = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}4^3 = 32\sqrt{3} \approx 55{,}43\left[\text{cm}^3\right]$

b) $V = 32\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}3^2\pi = V_{\text{Prisma}} + \tfrac{1}{3}r^2 \cdot h_{\text{Grundfläche}} \cdot \pi = 32\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}2^2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}2 \cdot \pi = 32\sqrt{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \pi$

$\approx 55{,}426 + 7{,}255 \approx \underline{\underline{62{,}68\left[\text{cm}^3\right]}}$

c) $\dfrac{62{,}68}{55{,}43} - 1 \approx 0{,}131 \;\square\; 13{,}1\%$

Aufgabe 2



$V_P = \tfrac{1}{3}a^2h = \tfrac{1}{3}10^2 \cdot 15 = 500\left[\text{cm}^3\right]$

$V_K = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi \approx 392{,}7\left[\text{cm}^3\right]$

$V_{\text{Abschliff}} = V_P - V_K \approx 500 - 392{,}7 = 107{,}3\left[\text{cm}^3\right]$

$\dfrac{V_{\text{Abschliff}}}{V_P} = \dfrac{\tfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 15 - \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15}{\tfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 15}$

$= \dfrac{\tfrac{15}{3} \cdot \left(10^2 - \pi \cdot 5^2\right)}{\tfrac{15}{3} \cdot \left(10^2\right)} = \dfrac{100 - 25\pi}{100}$

$\approx \dfrac{21{,}5}{100} = 0{,}215 \;\square\; 21{,}5\%$