KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

REPETITIONSAUFGABEN VEKTORGEOMETRIE 4. KLASSE

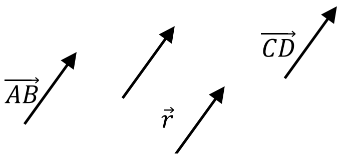
Zur Ausgangslage: In der Vektorgeometrie weichen die Stoffpläne der einzelnen Luzerner Mittelschulen kapitelmässig voneinander ab. Daher sind die Repetitionsaufgaben bei dieser Zusammenstellung nach Kapiteltiteln gegliedert. Der Schüler muss sich orientieren, welche Themen er aus der 4.Klasse kennt, welche an seiner Kanti erst in der 5.Klasse vermittelt werden.
Aus den Stoffplänen der einzelnen Kantonsschulen erkennt man entweder einen Aufbau
nach dem Buch „Vektorgeometrie – Heinz Bachmann / Sabe Verlag“ [Kapitel 1+2+5 ohne Kapitel 3+4]
oder
nach dem Skript „Vektorgeometrie – Siegerist/Wirth – K. Wirth, Zürich“ [Kapitel 1−4 ohne Kapitel 5];
evtl. gibt es auch einen lehrerspezifischen Stoffplanablauf, speziell dann, wenn dieselbe Lehrperson von der 4. bis zur 6. Klasse unterrichtet.
Einige Repetitionsaufgaben stammen aus dem gebundenen Büchlein „Trigonometrie und Vektorgeometrie - Erhard Rhyn – Bestellung: rhyn.gut@balcab.ch“.

KAPITEL 1: **Vektorbegriff, Linearkombination, kollineare und komplanare Vektoren**

LERNZIELE:

- Definition eines Vektors, Repräsentant;
- Grundoperationen: Vektorsumme, Vektordifferenz, skalare Multiplikation (Streckung);
- einen Vektor als Linearkombination von gegebenen Vektoren schreiben;
- Begriffe: kollineare Vektoren und komplanare Vektoren.

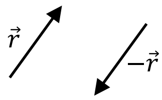
KURZTHEORIE:



gleicher Vektor, andere Repräsentanten

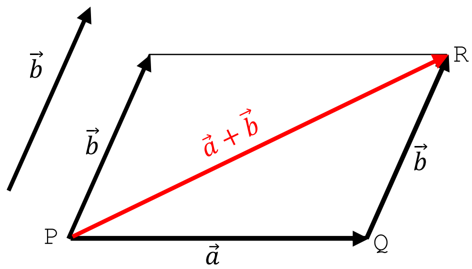
Definition: Ein **Vektor** entspricht der Menge aller Pfeile mit gleicher Richtung und gleicher Länge.
Ein einzelner Pfeil ist ein sogenannter **Repräsentant** des entsprechenden Vektors.
Schreibweise: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{r} = etc$ „mit Anfangs- und Endpunkt oder mit Kleinbuchstaben“.

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{r}$ heisst **Gegenvektor** des Vektors $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$ mit entgegengesetzter Richtung aber gleicher Länge.

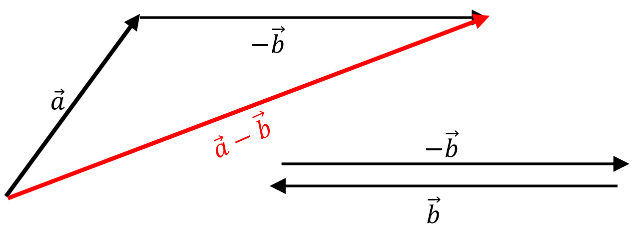


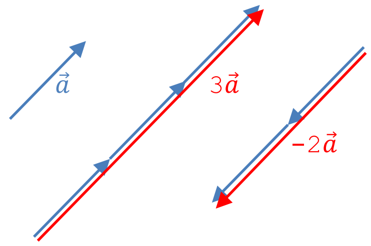
Grundoperationen:

1. **Vektorsumme:** $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
„Der Anfangspunkt des 2. Vektors wird an den Endpunkt des 1. Vektors angefügt“.
Es gilt das Kommutativgesetz nach dem Vektorparallelogramm (Physik: Kräfteparallelogramm).



2. **Vektordifferenz:** $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.
„Addition des Gegenvektors von $\vec{b}$“ .





3. **Skalare Multiplikation:** $s\,\vec{a} = \overrightarrow{sa}$.
„Entspricht der Betrag $|\vec{a}|$ von $\vec{a}$ der Länge des Vektors $\vec{a}$, so wird diese mit der reellen Zahl *s≠0* **gestreckt**“.
Ist *s>0*, so haben $\vec{a}$ und $\overrightarrow{sa}$ die gleiche Richtung,
ist *s<0*, so die entgegengesetzte Richtung.

Kurz: Mit Vektoren darf man rechnen wie mit algebraischen Termen (Zahlen und Variablen) ausser bei der Division darf im Divisor kein Vektor sein.

z.B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c} - \left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{0}$;
Durch Auflösen der Klammern entsteht der sogenannte **Nullvektor** (Endpunkt=Anfangspunkt)

Definition: Gegeben die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.
Der Vektor $\vec{r}$ heisst **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, falls es Streckungsfaktoren *s, t, u, …* gibt, so dass $\vec{r}$ geschrieben werden kann als

$$\vec{r} = s\,\vec{a} + t\,\vec{b} + u\,\vec{c} + \ldots\ ,$$

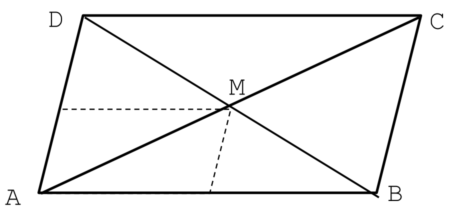
d.h. „als Summe der gegebenen Vektoren mit entsprechenden Streckungsfaktoren“.

Begriffe: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen **kollinear**, falls sie parallel zu einer Geraden liegen.
$\vec{b}$ ist dann eine Linearkombination von $\vec{a}$, d.h. $\vec{b} = s\vec{a}$ für einen geeigneten Streckungsfaktor s.
Algebraisch heissen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dann auch linear abhängig;
gibt es keinen Streckungsfaktor s, dann wären diese zwei Vektoren linear unabhängig.

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen **komplanar**, falls sie parallel zu einer Ebene liegen.
Nimmt man Repräsentanten mit gleichem Anfangspunkt, liegen $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene.
z.B. $\vec{c}$ ist dann eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
d.h. $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ für geeignete Streckungsfaktoren s und t.
Algebraisch heissen $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dann auch linear abhängig;
gibt es keine Streckungsfaktoren s und t, dann wären diese drei Vektoren linear unabhängig.

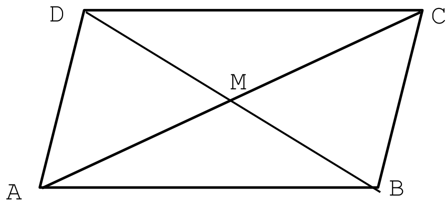
Beispiel: Drücke in einem Parallelogramm ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M je die Vektoren $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ *und* $\overrightarrow{DM}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aus:

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$; gleicher Vektor, andere Repräsentanten.
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b}$; immer kommutativ!
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} =$

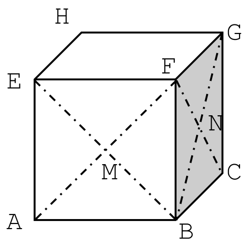


Tipp: Muss man einen Vektor $\overrightarrow{AB}$ ausdrücken, läuft man gedanklich von A aus „einen Umweg über andere Punkte“, deren Teilstrecken man mit gegebenen Vektoren ausdrücken kann, so dass man am Ende bei B landet.

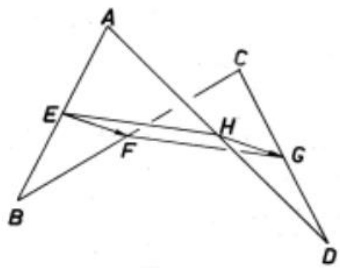
AUFGABEN ZUM KAPITEL 1:



1. Drücke im Parallelogramm ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M die Vektoren $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}$ *und* $\overrightarrow{MD}$ als Linearkombinationen der folgenden gegebenen Vektoren aus:
   a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
   b) $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ *und* $\vec{f} = \overrightarrow{BD}$



2. In einem Würfel ABCDEFGH mit den Diagonalschnittpunkten M und N der Seitenflächen ABEF bzw. BCFG sind $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ *und* $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ gegeben.
   Drücke folgende Vektorterme durch die gegebenen Vektoren aus: $\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{HB},\ \overrightarrow{CH},\ \overrightarrow{FM},\ \overrightarrow{CN}$ *und* $\overrightarrow{NM}$.



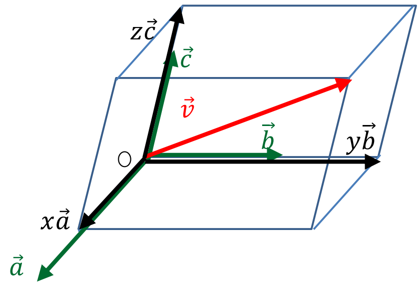
3. Von einem räumlichen Viereck ABCD (siehe Bild) kennt man $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ *und* $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
   a) Drücke den Seitenvektor $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ durch die drei gegegeben Vektoren aus.
   b) Zeige vektoriell, dass die Seitenmittelpunkte EFGH des Vierecks ABCD ein Parallelogramm bilden.

KAPITEL 2: **Vektoren im Koordinatensystem, Basis, Rechnen mit Komponenten, Vektorlänge**

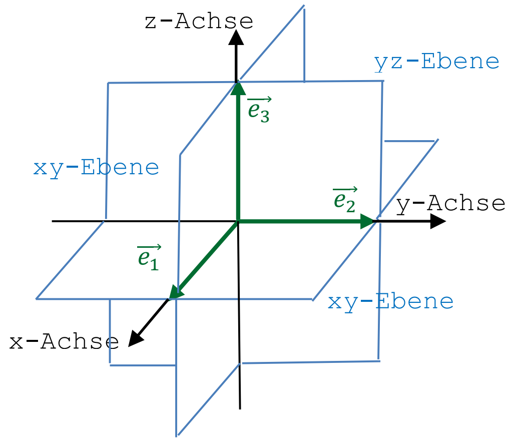
LERNZIELE:

- Orthonormierte Basis in R³: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;
- Komponenten eines Vektors; Ortsvektor; Koordinaten eines Punktes;
- Rechnen mit den Komponenten: Betrag/Länge eines Vektors; Vektoraddition und –subtraktion; skalare Multiplikation;
- Differenzenvektor; Streckenlänge; Mittelpunkt einer Strecke; Schwerpunkt eines Dreiecks.

KURZTHEORIE:



Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ im Raum mit gleichem Anfangspunkt O bilden immer ein Dreibein. Jeder vierte Vektor $\vec{v}$ kann als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und entsprechenden Streckungsfaktoren (Skalare x, y, z) geschrieben werden, denn $\vec{v}$ entspricht der Körperdiagonalen von O aus im Parallelflach (schiefer Quader) mit den drei Kantenvektoren $x\vec{a}, y\vec{b}$ und $z\vec{c}$



Nun wählen wir die drei nicht komplanaren Vektoren
$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
im nebenstehenden Koordinatensystem.

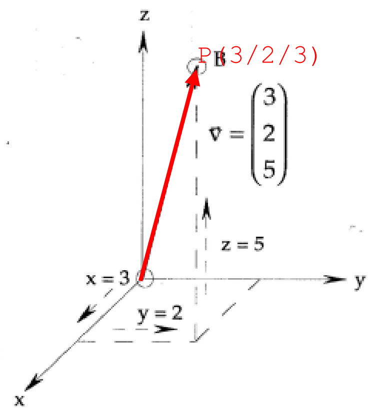
1. Sie stehen paarweise senkrecht/orthogonal aufeinander.
2. Sie haben je die Länge 1, sogenannte Einheitsvektoren.

Jeder Vektor $\vec{v}$ kann als Linearkombination geschrieben werden:

$$\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Dies ist die **Komponentendarstellung** des Vektors $\vec{v}$.

Beispiel: $$\vec{v} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 5\vec{e_3} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}.$$



Jedem Punkt P(x/y/z) im Raum wird eineindeutig ein **Ortsvektor** $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ zugeordnet (Anfangspunkt=Koordinatenursprung O):

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(3/2/5)\,.$$

Rechnen mit Komponenten

Betrag/Länge eines Vektors $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$ (Herl

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

Nullvektor: $\vec{o} = \overrightarrow{PP} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **Gegenvektor von $\vec{a}$:** $-\vec{a} = \begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$

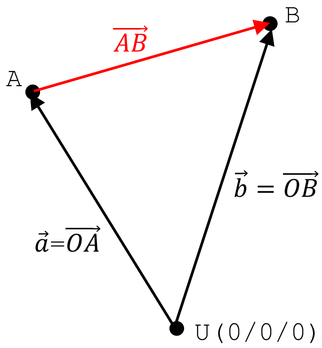
Kantonale Fachschaft Mathematik

Addition/Subtraktion: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $s\,\vec{a} = s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,a_1 \\ s\,a_2 \\ s\,a_3 \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{Erkenntnis}$ *Operationen erfolgen kompoentenweise!*

Grundaufgabe 1: **Differenzenvektor=Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$**



$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

*kurz: „Endpunkt minus Anfangspunkt“***.**

Beispiel: A(−2/5/6) und B(6/−3/2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Grundaufgabe 2: **Streckenlänge $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$**

$$|\overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{vmatrix} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

kurz: „Endpunkt minus Anfangspunkt“

Beispiel: A(−2/5/6) und B(6/−3/2) $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + (-4)^2} = 12$

Grundaufgabe 3: **Streckenmitte M von AB**

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$M\left(\frac{a_1+b_1}{2} / \frac{a_2+b_2}{2} / \frac{a_3+b_3}{2}\right)$ *kurz: „Koordinaten von A und B mitteln“*

Beispiel: A(−2/5/6) und B(6/−3/2) $\Rightarrow$ $M(2/1/4)$

Grundaufgabe 4: **Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC**

Idee: M sei der Mittelpunkt der Seite BC.
S liegt 2 von 3 Teilen von A aus auf der Seitenhalbierenden AM

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} / \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} / \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$$

Beispiel: A(−3/−2/5), B(1/2/−3) und C(5/6/−5) $\Rightarrow$ $S(1/2/-1)$

AUFGABEN ZUM KAPITEL 2:

4. Von einem Parallelogramm kennt man die Ecken A(−9/1/3), B(−1/3/6) und D(−5/3/−4).
Berechne die Koordinaten der Ecke C sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.

5. Bestimme x und z so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; und \; \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$ kollinear sind.

6. Gegeben sind die Punkte A(−7/−2/12) und B(1/14/−4). Die Strecke AB soll durch den Punkt T im Verhältnis 5 : 3 geteilt werden. Bestimme die Koordinaten von T.

7. Liegt der Punkt P(−4/4/−1) auf der Geraden durch A und B? *Hinweis: ohne Geradengleichung lösbar.*
a) A(−3/6/1) und B(−1/10/5) b) A(1/0/−4) und B(6/−4/5)

8. Gegeben: A(6/−7/7), B(−2/3/−1), S(2/−3/3).
Berechne die Koordinaten der Ecke C für das Dreieck ABC mit Schwerpunkt S.

9. Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Welcher **entgegengesetzt** gerichtete Vektor von $\vec{a}$ besitzt die Länge 18?

10. Von einem Trapez kennt man drei Ecken A(5/2/−3), B(−3/6/5) und C(2/5/7).
Berechne die Koordinaten der Ecke D so, dass das Trapez die Seite c=CD der Länge 9 besitzt.

11. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar?
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

12: Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; und \; \vec{d} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.
a) Ist $\vec{d}$ eine Linearkombination der drei andern Vektoren?
b) Wie liegt $\vec{d}$ im Vergleich zu den drei andern Vektoren im Raum?

13. Von einem Drachenviereck kennt man zwei gegenüberliegende Ecken A(5/2/3) und C(−3/−6/3).
Es hat die Ecke B auf der x-Achse und BD als Symmetrieachse. Zudem ist die Ecke D doppelt so weit vom Diagonalenschnittpunkt M entfernt wie B.
a) Bestimme die Koordinaten der Ecken B und D.
b) Wie gross ist sein Flächeninhalt F?

Weiterführende Aufgaben:

A. Gegeben sind die zwei Punkte A(9/−2/0) und B(−3/4/4), wobei AB ein Kugeldurchmesser bildet
Berechne die Durchstosspunkte D der Kugel mit der y-Achse.

B. Von einem zylinderförmigen Fass um die z-Achse (Drehachse) kennt man den Punkt A(10/−5/2) der Grundkreislinie (Bodenrand) und den Mittelpunkt M(0/0/22) des Deckelkreises.
Skizziere ihn und berechne danach das Zylindervolumen.

C. Gegeben: A(6/−10/−8) und S(0/40/0).
Von einem geraden Kreiskegel mit Spitze S und Mantellinie AS liegt die Höhe auf der y-Achse.
a) Berechne das Kegelvolumen.
b) Welcher Punkt P auf der Kegelhöhe hat von jedem Punkt der Grundkreislinie denselben Abstand wie von der Spitze S?

Kantonale Fachschaft Mathematik

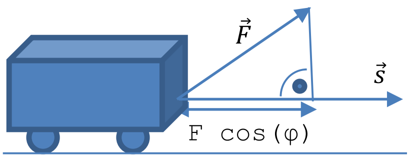
Kapitel 3: **Skalarprodukt, Zwischenwinkelform und Anwendungen**

LERNZIELE:

- Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren und Deutung der Zahl >0, =0, <0;
- Zwischenwinkelform $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ zur Berechnung des Zwischenwinkels φ zweier Vektoren;

KURZTHEORIE:

Aus der Physik kennt man: „Die Arbeit W, einen Wagen auf einer Schiene zu ziehen, ist das Produkt aus der längs des Weges wirkenden Komponente von der Kraft F und dem zurückgelegten Weg s“, also gilt mit dem Zwischenwinkel φ:
$W = F\,S\cos(\varphi)$.



Daher kommt man auf die eher theoretisch bedeutende

Definition: Das **Skalarprodukt** $\vec{a} \circ \vec{b}$ („dot“) ordnet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgende reelle Zahl zu
$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)$, wo φ der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Mit dem Cosinussatz (Trigonometrie für beliebiges Dreieck) kann die praktische Komponentendarsteltung des Skalarproduktes nachgewiesen werden.

Satz: $\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$;

kurz: „1.Komponente mal 1. plus 2.Komponente mal 2.plus 3.Komponete mal 3.“

Aus der Definition sind folgende Eigenschaften ersichtlich:

1. $\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}}$ *„oft anwendbar, falls ein rechter Winkel und eine Variable vorkommt“.*
2. $\vec{a} \circ \vec{b} \, {>\atop<} \, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) \, {>\atop<} \, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in {]0°;90°[\atop]90°;180°[}, \, also\ \varphi \, {spitz \atop stumpf}$.
3. **Zwischenwinkelform:** $\boldsymbol{\cos(\varphi)} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Im Wesentlichen darf man weiterhin rechnen wie mit Termen (Zahlen und Variablen): beispielweise
kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ assoziativ: $(s\,\vec{a}) \circ \vec{b} = s\,(\vec{a} \circ \vec{b})$ distributiv: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Beispiel: Gegeben ist das Dreieck A(1/−2/−2), B(4/5/−1) und C(−1/2/0).

a) Zeige, dass ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist (∟ bei C).
b) Wie gross sind die zwei andern Winkel?

a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 10 - 12 + 2 = 0, \ also \perp$

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \cos(\alpha) = \frac{-6+28+2}{\sqrt{24}\,\sqrt{59}}; \ \alpha = \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{24}\,\sqrt{59}}\right) = 50.37°; \ \beta = 90° - \alpha = 39.63°$

AUFGABEN ZUM KAPITEL 3:

14. Berechne für das Dreieck A(2/−3/−4), B(2/−1/1), C(8/3/4) alle Winkel und die Länge der Schwerlinie s_b:

15. Von welchen Punkten P der x-Achse aus sieht man die Strecke zwischen den beiden Punkte A(3/1/2) und B(5/1/−2) unter einem rechten Winkel?

16. Welche Winkel liegen zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und den Koordinatenachsen?

17. Gegeben die Ecken A(7/2/−1), B(4/6/−3), C(−2/2/−2) und D(1/−2/0).
    1. Zeige, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
    2. Wie gross ist sein Flächeninhalt F?
    3. Bestimme den Winkel zwischen seinen Diagonalen.

18. Gegeben: A(2/0/−1) und B(0/2/−2).
    Berechne die Ecke C auf der z-Achse des Dreiecks ABC so, dass der Winkel β=45° beträgt.

19 Von einem Rechteck kennt man die Ecken A(2/−1/10) und D(5/1/6), zudem liegt die Ecke B auf der y-Achse. Bestimme die Ecken B und C.

20. Beweise mit Hilfe des Skalarproduktes: Im Rhombus stehen die Diagonalen normal/senkrecht aufeinander. *Hinweis: es sei* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Kapitel 4: **Vektorprodukt und Anwendungen / in einigen Kantonsschulen nicht im Stoffplan!**

Wird ein zu zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $und\; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehender Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gesucht, müssen die SchülerInnen zwei Gleichungen $\vec{a} \circ \vec{c} = 0\;\; und\; \vec{b} \circ \vec{c} = 0$ mit 3 Variablen *x, y und z* lösen. Dabei kann eine Komponente $\vec{c}$ günstig gewählt werden, da es ja unendlich viele solche Vektoren $\vec{c}$ senkrecht zu $\vec{a}\;\, und\, \vec{b}$ gibt.

LERNZIELE:

- Definition des Vektorproduktes zweier Vektoren;
- Anwendung 1: Gesucht eine senkrechte Richtung zu zwei Vektoren;
- Anwendung 2: Gesucht der Flächeninhalt für das von zwei Vektoren aufgespannte Parallelogramm.

KURZTHEORIE:

Wir zeichnen nun einen oben beschriebenen, bestimmten Vektor $\vec{c}$ senkrecht zu $\vec{a}\;\, und\, \vec{b}$ aus, der sich für die Praxis als Vorteil erweist.

Definition: Das **Vektorprodukt $\vec{a}\, x\, \vec{b}$** („cross") ordnet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen neuen Vektor $\vec{c} = \vec{a}\; x\; \vec{b}$ mit folgenden drei Eigenschaften zu:

1. $\vec{c} = \vec{a}\; x\; \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}\;\; und\;\; \vec{b}$.
2. Die Länge $|\vec{c}| = |\vec{a}\; x\; \vec{b}|$ von $\vec{c}$ entspricht **zahlenmässig dem** Flächeninhalt des von $\vec{a}\;\; und\; \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
3. Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}\;\; und\;\; \vec{c} = \vec{a}\; x\; \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, d.h. Daumen der rechten Hand besitzt die Richtung von $\vec{a}$, der Zeigefinger die Richtung von $\vec{b}$ und der Mittelfinger die Richtung von $\vec{c} = \vec{a}\; x\; \vec{b}$.

Es kann nachgewiesen werden, dass die drei Eigenschaften vom folgenden Vektor erfüllt werden:

Satz: $$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \cancel{a_1 \quad b_1} \\ a_2 \quad b_2 \\ a_3 \quad b_3 \\ a_1 \quad b_1 \\ a_2 \quad b_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix};$$

kurz: „erste beiden Komponenten unten anhängen, erste Zeile streichen, dann über das Kreuz multiplizieren, jedoch beim Zurückrechnen subtrahieren".

Beim Rechnen mit dem Vektorprodukt ist Vorsicht geboten! Es gilt Folgendes: $\vec{a}\; x\; \vec{0} = \vec{0}$ und $\vec{a}\; x\; \vec{a} = \vec{0}$, sowie die „Antikommutativität" $\vec{a}\; x\; \vec{b} = -\left(\vec{b}\; x\; \vec{a}\right)$.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte A(−2/1/−1), B(1/3/1) und C(−3/−1/1).

a) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

b) Es gibt zwei Tetraeder (dreiseitige Pyramiden) ABCS mit Volumen 18, für die je der Fusspunkt der von der Spitze S ausgehenden Höhe die Mitte von BC ist. Bestimme die Koordinaten von S.

a) $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\; x\; \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4+4 \\ -2-6 \\ -6+2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\, 12 = 6.$

b) $V = \frac{1}{3} G\, h; \quad h = \frac{3\,V}{G} = \frac{3 \cdot 18}{6} = 9$;

Idee für die Spitzen S. Vom Mittelpunkt $M_{BC}(-1/1/1)$ h=9 Einheiten in Richtung des Vektorproduktes $\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit der Länge 12 „hinauf und hinunter" laufen.

$\overrightarrow{s_{1,2}} = \overrightarrow{OS_{1,2}} = \overrightarrow{OM_{1,2}} \pm \frac{9}{12}\left(\overrightarrow{AB}\; x\; \overrightarrow{AC}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad S_1(5/-5/-2)\;\; und\;\; S_2(-7/7/4)$.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 4:

21. Berechne für das Parallelogramm ABCD mit A(1/3/5), B(−1/−1/1) und Mittelpunkt M(1/0/−1)
    a) den Flächeninhalt F b) die Höhe h_a.

22. Gegeben: A(1/14/8) und B(−1/10/4).
    Für welche Punkte C der x-Achse besitzt das Dreieck ABC den Flächeninhalt 18?

23. Gegeben: 3 Würfelecken A(1/−1/1), B(−1/0/3) und D(3/1/2).
    Bestimme die Ecken C und E so, dass die von A ausgehenden Kanten $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\ und\ \overrightarrow{AE}$ in dieser Reihenfolge ein Linkssystem bilden.

24. Gegeben: A(0/4/0) und B(3/0/10).
    a) Wo liegt der Punkt A, wo der Punkt B im Koordinatensystem?
    b) Der Punkt C auf der positiven x-Achse ist von B doppelt so weit entfernt wie von A.
       Berechne vom Dreieck ABC die Ecke C, alle Winkel und den Flächeninhalt F.

25. Auf den positiven Koordinatenachsen befinden sich die drei Punkte A(a/0/0), B(0/a/0) und C(0/0/a).
    a) Skizziere das Dreieck ABC im Koordinatensystem. Punkte anschreiben.
    b) Berechne die Dreiecksfläche allgemein (ein Term mit der Variablen a).
    c) Bestimme das Pyramidenvolumen OABC allgemein.
    d) Wie weit ist der O-Punkt vom Dreieck ABC entfernt (allgemein)?

Weiterführende Aufgaben:

D. Gegeben: A(3/−1/5), B(1/3/2) und C(−3/−1/8).
   Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide, dessen Spitze S senkrecht zur Dreiecksfläche über dem Punkt A liegt. Das Pyramidenvolumen soll 54 betragen.
   Berechne die Koordinaten der möglichen Spitzen S.

E. Von einem geraden Kreiskegel kennt man den Grundkreismittelpunkt M(3/1/−1) und die Punkte A(−1/5/−3) und B(1/−3/−5) auf der Grundkreislinie.
   a) Zeige, dass A und B tatsächlich auf der Grundkreislinie liegen.
   b) Berechne die Koordinaten der möglichen Kreiskegelspitzen S so, dass das Volumen des Kreiskegels 108π beträgt.

KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Kapitel 5: **Parametergleichung einer Geraden**

LERNZIELE:

- Parametergleichung einer Geraden $g: \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{v}$; Erkennen von spezieller Lage in R³;
- Spurpunkte S_1 mit xy-Ebene, S_2 mit yz-Ebene und S_3 mit xz-Ebene einer Geraden g;
- 4 mögliche Fälle bei der Lage zweier Geraden g und h in Parameterform;
- Abstand „Punkt P – Gerade g(A,B)“

KURZTHEORIE:

Definition: Durch eine folgende **Parametergleichung ist eine Gerade g im Raum festgelegt**

$$\boldsymbol{g}: \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \boldsymbol{t}\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{g}: \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{t}\,\vec{\boldsymbol{v}}$$

*kurz: „der Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ zu einem beliebigen Punkt P der Geraden g wird durch einen **Ortsvektor** $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ zum Ausgangspunkt A von g plus einen um t gestreckten **Richtungs-vektor**/Geschwindigkeitsvektor $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{AB}$ ausgedrückt.“*

Beispiel: Betrachte die Gerade g durch A(4/−2/3) und B(2/−2/4). Liegt P(−6/−2/8) auf g?

1. Parametergleichung von $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad \mathrm{P} \in \mathrm{g}?\ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für t = 5 richtig.
2. Wie verläuft g im Raum?
   Da die y-Komponente des Richtungsvektors $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{AB}$ gleich 0 ist, verläuft g parallel zur xz-Ebene
3. Wo schneidet g die Koordinatenebenen? Sie heissen **Spurpunkte**.
   1.Spurpunkt $S_1 = g \cap xy - Ebene: \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nach III folgt t=−3; x=10; y=−2; S_1(10/−2/0).
   2.Spurpunkt $S_2 = g \cap yz - Ebene: \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nach I folgt t=2; y=−2; z=1; S_2(0/−2/1).
   3.Spurpunkt $S_3 = g \cap xz - Ebene$: existiert wegen dem Verlauf von g nicht.

Beachte: Die Parametergleichung einer Geraden ist nicht eindeutig;
man könnte z.B. den Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ oder den Richtungsvektor $\vec{\boldsymbol{v}} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ *wählen.*
Daher muss man den Fall von identischen Geraden nicht ausschliessen.

Schema zur Beurteilung der gegenseitigen Lage der zwei Geraden $\boldsymbol{g}: \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{t}\,\vec{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{h}: \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{s}\,\vec{\boldsymbol{w}}$

$\vec{v} = k\vec{w}$ lösbar nach k? d.h. kollineare Richtungsvektoren?

ja, g//h:

$\vec{a} = \vec{b} + s\vec{w}$ lösbar nach s?
d.h. gemeinsamer Punkt A?

- ja: genau eine Lösung für s, d.h. g und h identisch
- nein: keine Lösung für s, d.h. g und h echt parallel

nein:

$\vec{a} + t\vec{v} = \vec{b} + s\vec{w}$ lösbar nach t und s?
d.h. existiert ein Schnittpunkt S?

- ja: genau ein Lösungspaar {s,t}, d.h. g und h schneiden sich in S
- nein: kein Lösungspaar {s,t}, d.h. g und h windschief

Abstand Punkt P-Gerade $g: \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{v}$ mit Hilfe des Vektorproduktes

Idee: entspricht der Höhe h des von $\overrightarrow{AP}\, und\, \vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms

Formel: $d(P;g) = h = \frac{Flächeninhalt\ des\ Parallelogramms}{Grundlinie\ des\ Parallelogramms} = \frac{|\overrightarrow{AP} x \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Alternative: Höhenfusspunkt=Lotfusspunkt H auf g mit der Parametergleichung von g ausdrücken; wegen dem rechten Winkel mittels des Skalarproduktes $\overrightarrow{HP} \circ \vec{v} = 0$ den Parameter t berechnen.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 5:

Hinweis: ***Aufgaben, die das Kapitel 4 „Vektorprodukt“ voraussetzen, sind mit einem Stern * gekennzeichnet!!!***

26. Liegen die Punkte P(−1/3/17) und Q(8/−6/14) auf der Geraden g durch A(4/−2/2) und B(5/−3/−1)?

27. Gegeben: A(−2/−5/6) und B(1/10/6).
Bestimme die Spurpunkte der Geraden g durch A und B? Wie verläuft g im Raum?

28. Berechne je die gegenseitige Lage der Geradenpaare:

a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4.5 \\ -9 \end{pmatrix}\ und\ h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\ und\ h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

c) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\ und\ h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

d) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2.5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\ und\ h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$

29. Gegeben: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}\ und\ h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k-9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Wie muss k gewählt werden, damit die zwei Geraden g und h
a) parallel sind? b) sich schneiden?

30. Gegeben: A(2/0/−4), B(1/−1/−8), P(1/−1/1). Berechne für die Gerade g(A,B) den
a) Punkt G auf g mit kürzestem Abstand zu P. Wie gross ist dieser Abstand?
b)* den Abstand d(g,P) mit Formel (ohne zuerst G zu bestimmen).

31. Gegeben: A(−2/2/0) und B(−1/0/2), sowie Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
Gesucht die Punkte P auf der Geraden g so, dass der Winkel PAB=α=45° gilt.

Weiterführende Aufgaben:

F. Gegeben: P(5/−1/4), M(1/−3/−1) und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Grundkreismittelpunkt M und den Punkt P auf der Deckkreislinie. Seine Achse verläuft in Richtung von $\vec{v}$. Berechne

a) seinen Radius r. b) sein Volumen V.

G.* Gegeben: P(7/1/−2), sowie Gerade g durch A(7/−5/4) und B(9/−7/5).

Von einem geraden Kreiskegel mit Volumen 144π weiss man, dass seine Achse auf g liegt und P ein Grundkreislinienpunkt ist.

Berechne seine möglichen Spitzen S.

Kapitel 6: Parametergleichung und Koordinatengleichung einer Ebene und Anwendungen

Wird dieses Kapitel in der 4. Klasse behandelt, muss sich jede Schülerin und jeder Schüler bei seiner jeweiligen Mathematiklehrperson informieren, welche Themen behandelt wurden, weil die Stoffpläne der einzelnen Kantonsschulen stark voneinander abweichen!

LERNZIELE:

- Parametergleichung bzw. Koordinatengleichung einer Ebene aufstellen und umrechnen;
- Achsenabschnitte und Spurgeraden einer Ebene;
- Normalenvektor einer Ebene;
- Spezielle Lage einer Ebene im Koordinatensystem;
- Gerade und Ebene: Durchstosspunkt und Neigungswinkel;
- Schnittwinkel und Schnittgerade zweier Ebenen;
- Hessesche Normalform=Abstand Punkt-Ebene und ihre Anwendungen

KURZTHEORIE:

Definition: Durch eine folgende **Parametergleichung ist eine Ebene Σ im Raum festgelegt**

$$\boldsymbol{\Sigma: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma: \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}}$$

*kurz: „der Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ zu einem beliebigen Punkt P der Ebene **Σ** wird durch einen **Ortsvektor** $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ zum Ausgangspunkt A plus eine Linearkombination von zwei nicht kollinearen **Richtungsvektoren** $\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{AB}}$ **und** $\boldsymbol{\vec{w} = \overrightarrow{AC}}$ ausgedrückt.“*

Beispiel: Betrachte die Ebene Σ durch die drei Punkte A(0/2/1), B(3/−4/2) und C(−3/2/3).

$$\boldsymbol{\Sigma: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma: \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-6\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$$

wo $\vec{v}\ und\ \vec{w}$ zwei nicht kollineare Richtungsvektoren in der Ebene Σ sind.

Für die Veranschaulichung der Ebene im Raum ist die Koordinatengleichung aussagekräftiger:
Es sei P(x/y/z) ein beliebiger Punkt in Σ. Aus den drei Komponentengleichungen für P eliminieren wir die beiden Parameter t und s:

$$\begin{array}{llll} x = 0 + 3t - 3s \quad I & s\ eliminieren! & & t\ eliminieren! \\ y = 2 - 6t + 0s \quad II & 2\cdot I + 3\cdot III: & 2x + 3z = 3 + 9t \quad IV & 2\cdot IV + 3V: \quad 4x + 3y + 6z = 12 \\ z = 1 + t + 2s \quad III & II & y = 2 - 6t \quad V & \end{array}$$

$\Sigma: 4x + 3y + 6z - 12 = 0.$

Kontrolle: diese 3 Punkte A, B und C erfüllen durch Einsetzen je die Koordinatengleichung!

Definition: $ax + by + cz + d = 0$ heisst **Koordinatengleichung der Ebene Σ**.

$\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ist ein sogenannter **Normalenvektor der Ebene Σ,** der in jedem Punkt P von Σ als Anfangspunkt von $\overrightarrow{n_\Sigma}$ senkrecht auf die Ebene Σ steht.

Beachte: Alle kollinearen Vektoren zu $\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sind Normalenvektoren von Σ.

Durch **einen Punkt A und einen Normalenvektor $\boldsymbol{\overrightarrow{n_\Sigma}}$** ist eine Ebene auch eindeutig gegeben!

Wir können am obigen Beispiel zeigen, dass $\overrightarrow{n_\Sigma}$ senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AB}\ und\ \vec{w} = \overrightarrow{AC}$ von **Σ** ist, also ein Normalenvektor von **Σ** darstellt:

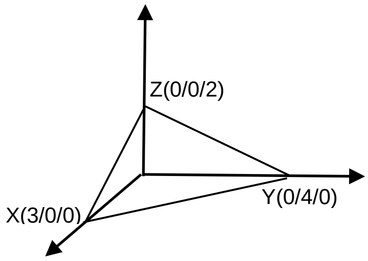
$$\overrightarrow{n_\Sigma} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-6\\1\end{pmatrix} = 12 - 18 + 6 = 0 \ \ und\ \ \overrightarrow{n_\Sigma} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Kantonale Fachschaft Mathematik

Definition: Die Achsenabschnittspunkte einer Ebene sind die Durchstosspunkte der Ebene durch die drei Koordinatenachsen. Die Spurgeraden sind die Schnittgeraden der Ebene mit den drei Koordinatenebenen.

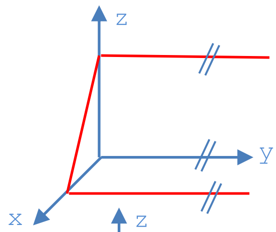
Verifiziere dies am vorherigen Beispiel $\Sigma: 4x+3y+6z-12=0$:

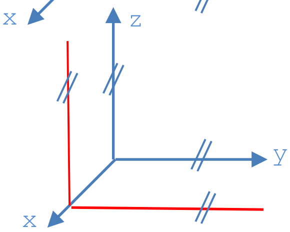
$\boldsymbol{S_1(x/0/0)} = \Sigma \cap \boldsymbol{x-Achse}$: $\quad \boldsymbol{4x+0+0-12=0}$; $\boldsymbol{x=3}$; $\boldsymbol{X(3/0/0)}$;
$\boldsymbol{S_2(0/y/0)} = \Sigma \cap \boldsymbol{y-Achse}$: $\quad \boldsymbol{0+3y+0-12=0}$; $\boldsymbol{x=4}$; $\boldsymbol{Y(0/4/0)}$;
$\boldsymbol{S_3(0/0/z)} = \Sigma \cap \boldsymbol{z-Achse}$: $\quad \boldsymbol{0+0+6z-12=0}$; $\boldsymbol{x=2}$; $\boldsymbol{Z(0/0/2)}$;
$\boldsymbol{1. Spurgerade\ durch\ S_1\ und\ S_2} = \Sigma \cap \boldsymbol{xy-Ebene}$: $\quad \boldsymbol{4x+3y+0-12=0}$;
$\boldsymbol{2. Spurgerade\ durch\ S_2\ und\ S_3} = \Sigma \cap \boldsymbol{yz-Ebene}$: $\quad \boldsymbol{0+3y+6z-12=0}$;
$\boldsymbol{3. Spurgerade\ durch\ S_1\ und\ S_3} = \Sigma \cap \boldsymbol{xz-Ebene}$: $\quad \boldsymbol{4x+0+6z-12=0}$.



Spezielle Lagen einer Ebene im Koordinatenssystem → Auswirkung auf ihre Koordinatengleichung

parallel zur x-Achse	**a=0**	**z.B.** $\Sigma: 3y+6z-12=0$
parallel zur y-Achse	**b=0**	**z.B.** $\Sigma: 2x+6z-12=0$ Bild rechts
parallel zur x-Achse	**c=0**	**z.B.** $\Sigma: 2x+3y-12=0$
parallel zur xy-Ebene	**a=b=0**	**z.B.** $\Sigma: 6z-12=0$
parallel zur yz-Ebene	**b=c=0**	**z.B.** $\Sigma: 2x-12=0$ Bild rechts
parallel zur xz-Ebene	**a=c=0**	**z.B.** $\Sigma: 3y-12=0$
durch den Ursprung	**d=0**	**z.B.** $\Sigma: 2x+3y+6z=0$

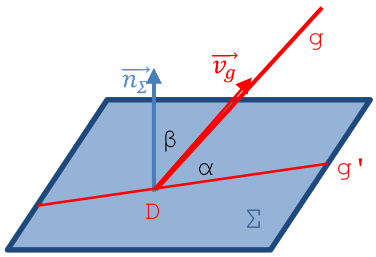




Neigungswinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene Σ

Definition: Dies ist der spitze Winkel α ∈ $[0°; 90°]$ zwischen der Geraden g und der Normalprojektion g‘ von g auf die Ebene Σ.

Idee: Man berechnet den spitzen Hilfswinkel β zwischen dem Richtungsvektor $\vec{v_g}$ von g und dem Normalenvektor $\vec{n_\Sigma}$ von Σ, dann ist α=90°−β.



Beispiel: g durch A(4/−1/−1) und B(−2/3/−3), sowie $\Sigma: 2x+y-2z-1=0$.

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ \vec{v_g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ |\vec{v_g}| = \sqrt{14}\,;\ \vec{n_\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ |\vec{n_\Sigma}| = \sqrt{9} = 3\,;$$

$$cos\beta = \frac{-6+2+2}{3\ \sqrt{14}} = \frac{-2}{3\ \sqrt{14}}\ ;\ \beta = arccos\left(\frac{-2}{3\ \sqrt{14}}\right) = 100.26°\ stumpf, daher\ \beta = 79.74°;$$

$$\alpha = 90° - \beta = 10.26°$$

Durchstosspunkt einer Geraden g mit einer Ebene Σ

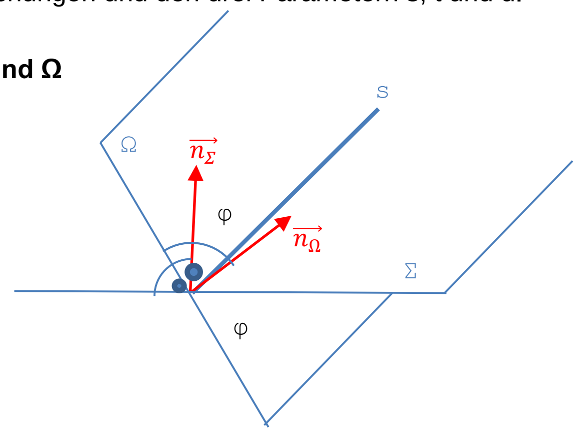
Idee: D=g∩ Σ, also erfüllt D die Parametergleichung von g und die Koordinatengleichung von **Σ.** d.h. die drei Koordinaten von D(x/y/z) mit den Komponenten der Parametergleichung von g ausdrücken, wo der Parameter t vorkommt. Dann Punkt D(x/y/z) in die Koordinatengleichung von Σ einsetzen und nach dem Parameter t auflösen.

Voriges Beispiel: $D \in g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $also\ D(4-3t/-1+2t/-1-t)\ in\ \Sigma\ einsetzen:$
$2(4-3t)+(-1+2t)-2(-1-t)-1=0;$
$8-6t-1+2t+2+2t-1=0;\quad 8=2t;\quad t=4;\quad D(-8/7/-5)$.

Beachte:
1. Ist g $in\ \Sigma$, so steht $\overrightarrow{n_\Sigma}$ senkrecht auf $\overrightarrow{v_g}$, d.h. ihr Skalarprodukt ist gleich 0. Würde man den Durchstosspunkt D berechnen, so fallen die Terme mit t weg. Es entsteht eine allgemeingültige Gleichung (da ja g $in\ \Sigma$ ist).
2. Ist g parallel zu Σ, so steht wieder $\overrightarrow{n_\Sigma}$ senkrecht auf $\overrightarrow{v_g}$, d.h. ihr Skalarprodukt ist gleich 0. Würde man D berechnen, so fallen die Terme mit t wieder weg. In diesem Falle entsteht ein Widerspruch. Daher existiert kein Durchstosspunkt D.
3. Ist die Ebene Σ durch die Parametergleichung $\vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ gegeben, so kann man diese mit der Parametergleichung $\vec{r} = \vec{b} + u\,\vec{c}$ der Geraden g gleichsetzen. So erhält man ein Gleichungssystem mit 3 Komponentengleichungen und den drei Parametern s, t und u.

Schnittwinkel φ und Schnittgerade g der beiden Ebenen Σ und Ω

Idee für φ: φ entspricht dem spitzen Zwischenwinkel zwischen den beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_\Sigma}$ und $\overrightarrow{n_\Omega}$.



1. Idee für g ohne Vektorprodukt:

Man legt 2 Punkte P und Q auf g fest; z.B. für P **wählt** man z=0 und setzt dies in die Koordinatengleichungen von Σ und Ω ein. So erhält man zwei Gleichungen mit zwei Variablen x und y; damit kann man den ersten Punkt P(x/y/z) berechnen. Dieses Verfahren muss man für den Punkt Q wiederholen, z.B. wählt man y=0 für Q(x/0/z).
Parametergleichung von g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$.

Beachte: Entsteht beim Lösen des Gleichungssystems ein Widerspruch, so hat man eine **ungünstige Wahl** getroffen; g hat dann eine spezielle Lage. Am besten macht man eine **andere** Wahl für eine **neue** Variable.
Eine elegantere Lösung entsteht, falls man z=t wählt, dem späteren Parameter der gesuchten Schnittgerade g. Dann löst man die zwei Gleichungen nach x und y auf, wo der Parameter t vorkommen kann und verwendet z=t für die Parametergleichung von g.

2. Idee für g mit Vektorprodukt:

Richtungsvektor von g: $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{n_\Sigma}\ x\ \overrightarrow{n_\Omega}$.
Anfangspunkt A von g: wähle z.B. z=0 für A(x/y/0) und setze dies in die Koordinatengleichungen von Σ und Ω ein wie es bei der 1. Idee oben besprochen wurde. Parametergleichung von g: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{v_g}$.

Beispiel: Gegeben $\Sigma: 3x+y-3z-9=0\ \ und\ \Omega: 6x-2y-9z-6=0,$

$also\ \overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} und\ \ \overrightarrow{n_\Omega} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix};\ \ cos\varphi = \frac{18-2+27}{\sqrt{19}\sqrt{121}} = \frac{43}{11\sqrt{19}};\ \varphi = arccos\frac{43}{11\sqrt{19}} = 26.26°$.

Wählt man z=0, so erhält man nach Lösen des Gleichungssystems: x=2 und y=3, also P(2/3/0).
Zudem y=0 setzen, so folgt nach Lösen des Gleichungssystems: x=7 und z=4, also Q(7/0/4).

g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Idee mit dem Vektorprodukt: $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{n_\Sigma}\ x\ \overrightarrow{n_\Omega} = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

Anfangspunkt A wie P oben.

Mit dem eleganteren Lösungsweg, wo z=t ist, erhält man $\begin{matrix} \Sigma: 3x + y - 3t - 9 = 0 & I \\ \Omega: 6x - 2y - 9t - 6 = 0 & II \end{matrix}$.

$2 \cdot I + II:\; 12x - 15t - 24 = 0;\; x = 2 + \frac{5}{4}t.$

$In\ I: y = 3 - \frac{3}{4}t; zudem\ ist\ ja\ z = t.\;\; Daraus\ folgt: \mathrm{g}: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Abstand Punkt P – Ebene Σ mit der Hilfe der Hesseschen Normalform

Definition: Die Hessesche Normalform HNF_Σ ist eine **spezielle Koordinatengleichung** von Σ, indem man diese durch die Länge des Normalenvektors $\overrightarrow{n_\Sigma}$ dividiert.

Satz ohne Beweis: Der Abstand des Punktes P von der Ebene Σ ist bis auf Vorzeichen gleich $HNF_\Sigma(P)$, d.h. „man setzt die Koordinaten von P in den Bruch der HNF_Σ ein, geschrieben als $HNF_\Sigma(P)$".

Beispiel: Gegeben sind $\Sigma: 2x - 2y + z + 6 = 0,\; A(10/-9/7)\ und\ B(-8/7/0)$.

$HNF_\Sigma = \frac{2x-2y+z+6}{\sqrt{2^3+(-2)^2+1^2}} = \frac{2x-2y+z+6}{3} = 0$.

$HNF_\Sigma(A) = \frac{20+18+7+6}{3} = 17 > 0$, d.h. Punkt A liegt auf der sogenannten **positiven** Seite von Σ, in die der Normalenvektor $\overrightarrow{n_\Sigma}$ zeigt, also ist der Abstand 17.

$HNF_\Sigma(B) = \frac{-16-14+0+6}{3} = -8 > 0$, d.h. Punkt A liegt auf der sogenannten **negativen** Seite von Σ, aber der Abstand beträgt 8.

Zusatz: Abstand des Koordinatenursprungs U(0/0/0) von Σ?
$HNF_\Sigma(U) = \frac{0+0+0+6}{3} = 2 > 0$, also ist der Abstand 2.

Folglich ist die **Bedeutung des Parameters d** in der Koordinatengleichung einer Ebene Σ klar; dividiert man d durch die Länge von $\overrightarrow{n_\Sigma}$, so erhält man **bis auf das Vorzeichen den Abstand des Koordinatenursprungs** U(0/0/0).

Anwendungen von HNF

1. Gesucht sind die beiden Parallelebenen $\Delta_{1,2}$ im Abstand 3 zur Ebene $\Sigma: 2x - 2y + z + 6 = 0$.
   Jeder Punkt P(x/y/z) von $\Delta_{1,2}$ besitzt den Abstand 3, also P(x/y/z) in die HNF_Σ einsetzen:
   $HNF_\Sigma(P) = \frac{2x-2y+z+6}{3} = \pm 3 \quad | \cdot 3 \quad und \quad | \mp 9;$
   $\Delta_1: 2x - 2y + z - 3 = 0\ und\ \Delta_2: 2x - 2y + z + 15 = 0$.
   Kontrolle: Parallelebenen besitzen kollineare Normalenvektoren, hier $\overrightarrow{n_\Delta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Die Winkelhalbierebenen $\Delta_{1,2}$ der Ebenen Σ und Ω ist die Menge aller Punkte P(x/y/z), die von Σ und Ω gleichweit entfernt sind.
   Fall 1 für Δ_1: $HNF_\Sigma(P)=HNF_\Omega(P)$.
   Fall 2 für Δ_2: $HNF_\Sigma(P)=-HNF_\Omega(P)$, d.h. bis auf Vorzeichen sind die beiden HNFs gleich

   Kontrolle von $\Delta_{1,2}$: die Normalenvektoren müssen senkrecht stehen, d.h. $\overrightarrow{n_{\Delta 1}} \circ \overrightarrow{n_{\Delta 2}} = 0$.
   Im 2-dimensionalen gilt ja für ein Dreieck auch: die äussere Winkelhalbierende w_α' eines Winkel α steht senkrecht zur inneren Winkelhalbierenden w_α .

AUFGABEN ZUM KAPITEL 6:

32. Berechne zuerst die Parametergleichung, dann die Koordinatengleichung der Ebene Σ durch die drei Punkte A(4/−2/−2), B(7/2/4) und C(0/−5/−3). Gib auch einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_\Sigma}$ der Ebene Σ an.

33. Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene Σ; zeichne ein Schrägbild mit ihren Spurgeraden für
a) $\Sigma: 3x - 2y + 2z - 12 = 0$ b) $\Sigma: 3x - 2y + 12 = 0$

34. Welche spezielle Lage hat je die Ebene Σ ?
a) $\Sigma: 2y - 5z + 9 = 0$ b) $\Sigma: 4x - 5 = 0$ c) $\Sigma: 2x + 3z = 0$

35. Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene Ω, die durch den Punkt P(4/−2/−4) geht und
a) parallel zur Ebene $\Sigma: 2x - y + 6z + 2 = 0$ ist.
b) senkrecht zur Geraden g durch A(2/1/−3) und B(−4/−11/1) steht.

36. Berechne je den Neigungswinkel und den Durchstosspunkt D=g∩ Σ für
a) $\Sigma: 3x - y + 4z - 15 = 0$ und $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
b) $\Sigma: 5x + 6y - 2z - 20 = 0$ und $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) $\Sigma: 4y - 3z + 27 = 0$ und $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

37. Gegeben sind die beiden Ebenen $\Sigma: 2x + y + 3z - 14 = 0 \; und \; \Omega: 6x + 3y - 7y + 6 = 0$.
Berechne den Schnittwinkel φ der beiden Ebenen und deren Schnittgeraden g.

38. Wie gross ist je der Abstand des Punktes U(0/0/0) bzw. P(6/−3/−3) bzw. Q(4/5/−2) von der Ebene $\Sigma: 2x - 6y + 3z - 14 = 0$?

39. Wie lauten die Koordinatengleichungen der beiden Parallelebenen $\Delta_{1,2}$ im Abstand 4 zur Ebene $\Sigma: 2x - 6y + 3z - 14 = 0$?

40. Wie lauten die Koordinatengleichungen der beiden Winkelhalbierebenen $\Delta_{1,2}$ zu den beiden Ebenen $\Sigma: 2x + y - 2z - 12 = 0 \; und \; \Omega: 8x - y - 4z + 6 = 0$?

LÖSUNGEN ZU DEN KAPITELN

Kapitel 1:

1. a) $\overrightarrow{DC}=\vec{a};\ \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-\vec{a}-\vec{b};\ \overrightarrow{DA}=-\vec{b};\ \ \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
   b) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}\vec{f}+\frac{1}{2}\vec{e};\ \overrightarrow{CA}=-\vec{e};\ \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{e};\ \ \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\vec{f}$

2. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c};\ \ \overrightarrow{HB}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\ \ \overrightarrow{CH}=-\vec{a}+\vec{c};$
   $\overrightarrow{FM}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c};\ \ \overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c};\overrightarrow{NM}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

3. a) $\vec{d}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\vec{a}-\ \vec{b}-\vec{c}$
   b) *Die Aussage gilt auch für ein räumliches Viereck, daher die Situation im 3D dargestellt.*
   $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};\ .\ \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\ \ \ nach\ Einsetzen\ von\ a).$

Kapitel 2:

4. $\vec{c}=\vec{b}+\overrightarrow{AD};C(3/5/-1);\ \ Mittelpunkt\ von\ BD\ bzw.AC{:}\ M(-3/3/2).$

5. $\vec{a}=k\,\vec{b}=0\ ;\ aus\ 2.Komponentengl.\ \ folgt{:}\ k=-2;dann\ \ x=1\ \ und\ z=-1.5$

6. $\overrightarrow{OT}=\ \overrightarrow{OA}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\ ;\ \ T(-2/8/2)$

7. $\overrightarrow{AB}\ und\ \overrightarrow{AP}\ kollinear,d.h.\ \ \overrightarrow{AB}=\ k\cdot\overrightarrow{AP}\ ?\ \ \ \ \ a)\ \ ja,\ \ k=-2;\ jede\ Komponentengl.muss\ erfüllt\ sein!$
   $b)\ \ nein,denn\ es\ existiert\ kein\ k,das\ jede\ Komponentengl.erfüllt!$

8. $Mittelpunkt\ der\ Seite\ AB{:}\ M_{AB}(2/-2/3);\ \vec{c}=\overrightarrow{m_{AB}}+3\ \overrightarrow{M_{AB}S};\ C(2/-5/3);$
   oder Formel der Aufgabe 4b) aus Kapitel 1 auflösen: $\vec{c}=3\vec{s}-\vec{a}-\vec{b}$, *dann komponentenweise rechnen.*

9. $\vec{b}=-\frac{18}{|\vec{a}|}\vec{a}=\begin{pmatrix}-12\\12\\-6\end{pmatrix};Minus,weil\ entgegengesetzt.$

10. $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\begin{pmatrix}8\\-4\\-8\end{pmatrix}\right|=12;\ \overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix};\ \vec{d}=\vec{c}+\overrightarrow{CD};\ D(8/2/1);$

11. $Prüfe,ob\ es\ ein\ Lösungspaar\ (x,y)\ gibt\ für\ \ \ \vec{c}=x\cdot\ \vec{a}+y\cdot\vec{b}.$
   a) *aus zwei Komponentengleichungen x und y berechnen und nicht verwendete prüfen;*
   es gibt kein Lösungspaar, also sind die Vektoren nicht komplanar;
   mit gleichem Anfangspunkte würden sie ein Dreibein in R^3 *bilden.*
   b) $(3,-2),d.h.\vec{c}=3\vec{a}\ -2\vec{b}\ .$

12. a) $Löse\ das\ (3x3)-Gleichungssystem\ \vec{d}=x\cdot\ \vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}.\ \ \vec{d}=-2\cdot\vec{b}+3\cdot\vec{c}.$
   b) $\vec{d}$ *ist komplanar zu* $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$*; nimmt man Repräsentanten mit gleichem Anfangspunkt schaut* $\vec{a}$ *aus der Ebene von* $\vec{b},\vec{c}$ *und* $\vec{d}$ *heraus.*

13. a) *Drachenviereck-Eigenschaft* $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\ \ mit\ \ B(x/0/0)\ \ nach\ dem\ Quadrieren{:}$
   $(x-5)^2+(-2)^2+(-3)^2=(x+3)^2+6^2+(-3)^2;\ B(-1/0/0);$
   Diagonalenschnittpunkt=Mittelpunkt $M_{AC}(1/-2/3)$*;*
   $\vec{d}=\overrightarrow{m_{AC}}+2\ \overrightarrow{BM_{AC}};\ D(5/-6/9).$
   b) $F=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{128}\sqrt{153}\approx 69.97.$

Kantonale Fachschaft Mathematik

Weiterführende Aufgaben:

A. $M(3/1/2);\ r = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7;\ D(0/y/0)\ in\ Gleichung\ \left|\overrightarrow{DM}\right| = 7\ \ einsetzen:$
$\sqrt{3^2 + (1-y)^2 + 2^2} = 7;\ D_1(0/7/0)\ und\ D_2(0/-5/0).$

B. $Grundkreismittelpunkt\ Z\ besitzt\ dieselbe\ z - Koordinate\ wie\ A: Z(0/0/2).$
$V = r^2\pi h = \left|\overrightarrow{AZ}\right|^2 \pi\ \left|\overrightarrow{ZM}\right| = 125\ \pi\ 20 = 2500\pi \approx 7853.98\ .$

C. a) $Grundkreismittelpunkt\ besitzt\ dieselbe\ y - Koordinate\ wie\ A: M(0/-10/0).$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 \pi\ h = \frac{1}{3}10^2\ \pi\ 50 \approx 5235.99$$

b) $P(0/y/0)\ in\ Gleichung\ \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PS}\right|\ \ einsetzen, quadrieren\ und\ nach\ x\ auflösen: P(0/14/0);$
Zur Information: P wäre der Mittelpunkt der Umkreiskugel dieses geraden Kreiskegels.

Kapitel 3:

14. *Winkelform für α und β; γ=180°– α–β; Seitenmittelpunkt* M_{AC}*;* $|\overrightarrow{s_b}| = \left|\overrightarrow{AM_{AC}}\right|.$
$\alpha = 34.11°;\ \beta = 123.15°;\ \gamma = 22.74°;\ M_{BC}(5/0/0);\ s_b = \sqrt{11} \approx 3.32$

15. $P(x/0/0);\ \overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{BP} = 0\ ergibt\ die\ quadr.Gl.\ x^2 - 8x + 12 = 0;\ P_1(2/0/0)\ und\ P_2(6/0/0)\ .$

16. *Mit Winkelform jeden Winkel zwischen* $\vec{a}$ *und* $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ bzw.\overrightarrow{e_2}\ \ bzw.\overrightarrow{e_3}$ *berechnen.*
$\alpha = 68.58°;\ \beta = 79.48°;\ \gamma = 24.09°$

17. 1. *zu zeigen:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ (Parallelogramm)\ und\ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0.$
2. $F = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{29} \cdot \sqrt{53} \approx 39.20.$
3. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-9\\0\\-1\end{pmatrix} und\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-3\\8\\3\end{pmatrix};\ cos\varphi = \frac{27-3}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{82}};\ \varphi = 72.98°$

18. *C(0/0/z);* $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = z + 6;\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3;\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{z^2 + 4z + 8};$
$cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{z+6}{3\ \sqrt{z^2+4z+8}}\ \ \ quadrieren, mal\ HN:\ \ 7z^2 + 12z = 0;\ \ C_1(0/0/0)\ und\ C_2(0/0/-\frac{12}{7}):$

19. *B(0/y/0);* $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} = 2y + 36 = 0;\ y = -18; B(0/-18/0);\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD};\ \ C(3/-16/-4)$

20. $Es\ sei\ \vec{a} = \overrightarrow{AB}\ und\ \ \vec{b} = \overrightarrow{AD}.\ Im\ Rhombus\ gilt: |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|;\ \ \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}\ und\ \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}.$
$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\circ\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = komponentenweise = \left|\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$

Kapitel 4:

21. a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\,\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$; *D(3/1/−3); F*$= |\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}24\\-24\\12\end{pmatrix}\right| = 36.$

b) $h_a = \frac{F}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{36}{6} = 6.$

22. $|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}x-1\\-14\\-8\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-24\\-4x-12\\4x+24\end{pmatrix}\right| = \sqrt{32x^2+288x+1296} = 2\cdot 18$ Parallelogramm;

Nach Quadrieren: $32x^2 + 288x = 32x(x+9) = 0$; $C_1(0/0/0)$ *und* $C_2(-9/0/0)$

23. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$: *C(1/2/4).*

Richtung für AE: $\vec{v} = -(\overrightarrow{AD}x\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}$ *[Minus wegen Linkssystem]*

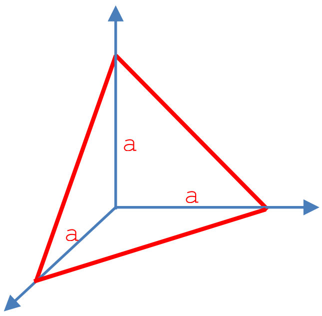
oder $\vec{v} = \overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{9}\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}$; *E(0/1/−1).*

24. a) *A liegt auf der y-Achse, B in der xz-Ebene.*

b) 1. $C(x/0/0)$; $|\overrightarrow{BC}| = 2\cdot|\overrightarrow{AC}|$: $\sqrt{(x-3)^2+0^2+(-10)^2} = 2\sqrt{x^2+(-4)^2+0^2}$;
$x = 3 > 0$; $C(3/0/0)$; *x=−5 fällt nach Voraussetzung weg.*

2. *Skizziert man das Dreieck, so erkennt man γ=90°.*
Alle Winkel auch mit der Winkelform berechenbar: α=63.43° und β=26.57°.

3. $F = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}| = 25.$



25. b) $F = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}a^2\\a^2\\a^2\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$;

c) $V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{2}\,a = \frac{a^3}{6}$;

d) *Gesuchter Abstand=Körperhöhe h zur Grundfläche G=ΔABC ;*
zur Info: h verläuft vom Ursprung zum Schwerpunkt S von ABC.
$V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}\,h = \frac{a^3}{6}$; $h = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Weiterführende Aufgaben:

D. *Pyramidenvolumen* $V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}|\,h = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}12\\24\\24\end{pmatrix}\right|\,h = 54$; $h = 9.$;

Idee: von Ecke A aus 9 Einheiten senkrecht „nach oben/unten“ in Richtung des Vektorprodukts
$\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}12\\24\\24\end{pmatrix}$ *gehen, gekürzt* $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \pm \frac{9}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; *S1(6/5/11) und S2(0/−7/−1)*

E. a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = 6$

b) $V = \frac{1}{3}|\overrightarrow{MA}|^2\pi\,h = 108\pi$: $h = 9$; *Richtung der Höhe* $\vec{v} = \overrightarrow{MA}x\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}-24\\-12\\24\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{9}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \pm 3\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$; *S1(−3/−2/5) und S2(9/4/−7).*

Kapitel 5:

26. $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix};\ P\ ja\ mit\ t = -5;\ Q\ nein, da\ kein\ t\ alle\ 3\ Komponentengleichungen\ erfüllt.$

27. $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *//xy-Ebene, da 3. Komponente des Richtungsvektors=0 ist.*
S_1 existiert nicht wegen dem Verlauf von g; $S_2(x=0/5/6)$; $S_3(-1/y=0/6)$.

28. *1.* *Untersuche, ob Richtungsvektoren kollinear sind. Wenn ja, dann Geraden identisch oder echt parallel; wenn nein, dann sich schneidend oder windschief.*
2. *Identisch, wenn der eine Anfangspunkt die Parametergleichung der andern erfüllt; andernfalls sind sie echt parallel.*
Sich schneidend, wenn nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen von g und h mit den zwei Parameter t und s ihre berechneten Werte alle drei Gleichungen erfüllen; andernfalls sind sie windschief.
a) *identisch=zusammenfallend,*
b) *sich schneidend mit $t_g=-2$ und $s_h=-1$, sowie Schnittpunkt S(5/3/4).*
c) *windschief verlaufend; aus I und III folgt: $t_g=1$ und $s_h=2$, jedoch damit II nicht erfüllt.*
d) *echt parallel.*

29. *a)* $\overrightarrow{v_g} = k\, \overrightarrow{v_h},\ also\ k = 2$ *nach 2. Komponente.*
b) *Beide Gleichungen gleichsetzen mit Parameter t_g und s_h: k=3; $t_g=-1$, $s_h=5$; S(5/6/4)*

30. *a)* $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};\ G(2+t/t/-4+4t);\ \ \overrightarrow{PG} \circ \overrightarrow{AB} = 0:\ t = 1;\ G(3/1/0);$

$d(g,P) = \left|\overrightarrow{PG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = 3.\ .$

*b)** $d(g,P) = Parallelogrammshöhe = \frac{F}{G} = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = 3.$

31. $P(t/1+t/4-t);\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3;\ \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix} t+2 \\ t-1 \\ 4-t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3t^2-6t+21}\ ;$

$cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3t+12}{3\ \sqrt{3z^2-6t+21}}\ \ quadrieren, mal\ HN:\ \ t^2+10t-11 = 0;\ \ \ t_1 = 1\ und\ t_2 = -11;$
$P_1(1/2/3)$ und $P_2(-11/-10/15)$.

Weiterführende Aufgaben:

F. *a)* *Zentrum der Deckkreislinie Z auf der Geraden g(M, $\vec{v}$):* $Z(1+t/-3+2t/-1+2t);$

$\overrightarrow{PZ} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t-2 \\ 2t-5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0:\ t = 2;\ Z(3/1/3);\ r = \left|\overrightarrow{PZ}\right| = 3.$

b) $h = \left|\overrightarrow{MZ}\right| = 6;\ \ V = r^2\pi\ h = 54\pi \approx 169.65.$

*G.** *Grundkreismittelpunkt M auf der Geraden $g(A, \overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{AB})$:* $M(7+2t/-5-2t/4+t);$

$\overrightarrow{PM} \circ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t-6 \\ t+6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0:\ t = -2;\ M(3/-1/2);\ r = \left|\overrightarrow{PM}\right| = 6;\ \ h = \frac{3V}{r^2\pi} = 12.$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{12}{|\overrightarrow{v_g}|}\overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \frac{12}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$ *$S_1(11/-9/6)$ und $S_2(-5/7/-2)$.*

Kantonale Fachschaft Mathematik

Kapitel 6:

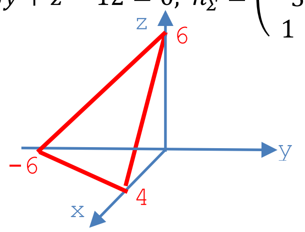
32. $\Sigma: \vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix}$; Parameter s wegschaffen!

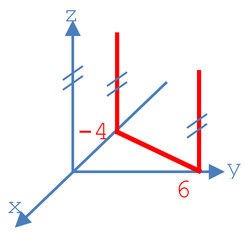
$I - 4\cdot III:\ x - 4z = 12 - 21t\ \ IV \quad und \quad II - 3\cdot III:\ y - 3z = 4 - 14t\ \ V$

$2\cdot IV - 3\cdot V:\ 2x - 3y + z = 12,\ also\ \Sigma: 2x - 3y + z - 12 = 0,\ \overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}.$

33.. a) *X(4/0/0); Y(0/−6/0); Z(0/0/6).*

b) *Σ//z-Achse, also kein Schnittpunkt mit der z-Achse!*
X(−4/0/0); Y(0/6/0).





34. a) Σ//x − Achse b) Σ//yz − Ebene c) Σ durch y − Achse, da d = 0

35. a) $\overrightarrow{n_\Omega} = \overrightarrow{n_\Sigma};\ P(4/-2/-4) \in \Omega: 2x - y + 6z + d = 0;\quad d = 14;\quad \Omega: 2x - y + 6z + 14 = 0\,.$

b) $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\-12\\4\end{pmatrix}, gekürzt\ mit\ -2:\ \overrightarrow{n_\Sigma} = \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}:\quad \Omega: 3x + 6y - 2z + d = 0;$

$P(4/-2/-4) \in \Omega: 3x + 6y - 2z + d = 0;\quad d = -8;\quad \Omega: 3x + 6y - 2z - 8 = 0.$

36. a) $\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix},\ |\overrightarrow{n_\Sigma}| = \sqrt{26}\ \ und\ \ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix},\ |\overrightarrow{v_g}| = \sqrt{17}\ \ in\ die\ Winkelform\ einsetzen;$

$\beta = 103.76°\ stumpf;\ \beta = 76.24°\ spitz;\ \alpha = 90° - \beta = 13.76°;$

$D \in g, also\ D(-4 + 2t/-10 + 3t/8 - 2t)\ in\ \Sigma\ einsetzen: t = 3; D(2/-1/2).$

b) $\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}5\\6\\-2\end{pmatrix},\ |\overrightarrow{n_\Sigma}| = \sqrt{65}\ \ und\ \ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}, |\overrightarrow{v_g}| = \sqrt{26}\,;\ \beta = 55.98°;\ \alpha = 90° - 55.98° = 34.02°;$

$D \in g, also\ D(14 + 5t/0/2 + t)\ in\ \Sigma\ einsetzen: t = -2; D(4/0/0)\ auf\ der\ x - Achse.$

c) $\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\ und\ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix};\ da\ \overrightarrow{n_\Sigma} \circ \overrightarrow{v_g} = 0.\ so\ \beta = 90°, d.h. \alpha = 0°;\ g//\Sigma\ \ oder\ g \in \Sigma;$

$D \in g, also\ D\left(7 - \frac{2t}{2} + \frac{3t}{8} + 4t\right) in\ \Sigma\ einsetzen: 8 = 0 Widerspruch; daher\ g//\Sigma.$

37. $\overrightarrow{n_\Sigma} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, |\overrightarrow{n_\Sigma}| = \sqrt{14}\,, \overrightarrow{n_\Omega} = \begin{pmatrix}6\\3\\-7\end{pmatrix}, |\overrightarrow{n_\Omega}| = \sqrt{94}\ \ in\ die\ Winkelform\ einsetzen;\ \varphi = 99.52°;\ \varphi = 80.48°;$

$z = 0\ geht\ nicht, da\ g//xy - Ebene\ ist\ (unklar\ zum\ voraus); wähle\ x = 0;\ \ g: \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}.$

38. $d(U;\Sigma) = \left|\frac{-14}{7}\right| = 2;\ U\ liegt\ auf\ der\ negativen\ Seite\ von\ \Sigma.$

$d(P;\Sigma) = \left|\frac{12 + 18 - 9 - 14}{7}\right| = 1;\ P\ liegt\ auf\ der\ positiven\ Seite\ von\ \Sigma.$

$d(Q;\Sigma) = \left|\frac{8 - 30 - 6 - 14}{7}\right| = \left|\frac{-42}{7}\right| = 6;\ P\ liegt\ auf\ der\ negativen\ Seite\ von\ \Sigma.$

39. $HNF_\Sigma(P(x/y/z)) = \pm 4;\ \ fallmässig\ alles\ auf\ eine\ Seite\ nehmen:\ \ \Delta_{1,2}: 2x - 6y + 3z\genfrac{}{}{0pt}{}{-42}{+14} = 0\,.$

40. $HNF_\Sigma(P(x/y/z)) = HNF_\Omega(P(x/y/z)), alles\ auf\ eine\ Seite\ nehmen:\ \ \Delta_1: x - 2y + z + 21 = 0\ .$
$HNF_\Sigma(P(x/y/z)) = -HNF_\Omega(P(x/y/z)), alles\ auf\ eine\ Seite\ nehmen:\ \ \Delta_2: 7x + y - 5z - 15 = 0\ .$
Kontrolle: . $\overrightarrow{n_{\Delta 1}} \circ \overrightarrow{n_{\Delta 2}} = 2 + 5 - 7 = 0.$